בס"ד

משוואות דפרנציאליות רגילות 88-240

תרגילים 9 - פתרונות לשאלות $2,4$

1. פתור את המשוואות הבאות על ידי שיטת פרובניוס:

$$\begin{aligned} 2x^2y'' - xy' + (x-5)y &= 0 \\ y'' + cy' + \frac{3}{16x^2}y &= 0 \end{aligned}$$

במשוואה השנייה c הוא קבוע שאינו אפס.

---

2. העזר בשיטת פרובניוס לפתור את המשוואה

$$x^2y'' + xy' + (x^2+\nu^2)y = 0$$

כאשר ν הוא קבוע חיובי. יש למצוא את הפתרון הממשי הכללי.

נחפש פתרון בצורה

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}\ , \qquad a_0 \neq 0$$

יש לנו ש-

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1} \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha-2} \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} 0 &= x^2y'' + xy' + (x^2+\nu^2)y \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha+2} + \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[(n+\alpha)(n+\alpha-1) + (n+\alpha) + \nu^2\Big] a_n x^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[(n+\alpha)^2 + \nu^2\Big] a_n x^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha+2} \end{aligned}$$

התאפסות המקדם של x^α (רק מופיע בסכום הראשון) נותנת את המשוואה המציינת

$$\alpha^2 + \nu^2 = 0$$

עם פתרונות $\alpha = \pm i\nu$.

התאפסות המקדם של $x^{\alpha+1}$ (רק מופיע בסכום הראשון) נותנת

$$\Big[(1+\alpha)^2 + \nu^2\Big] a_1 = 0$$

שממנו נובע ש- $a_1 = 0$.

התאפסות המקדם של $x^{\alpha+n}$ כאשר $n \geq 2$ נותנת

$$\left[(n+\alpha)^2 + \nu^2\right] a_n + a_{n-2} = 0 \qquad n = 2, 3, \ldots$$

או

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\alpha)} \qquad n = 2, 3, \ldots$$

היות ו- $\alpha^2 + \nu^2 = 0$. ולכן $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$. ו-

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2(2+2\alpha)} a_0 = \frac{-a_0}{2^2 \cdot 1! \cdot (1+\alpha)} \\ a_4 &= -\frac{1}{4(4+2\alpha)} a_2 = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2! \cdot (1+\alpha)(2+\alpha)} \\ a_6 &= -\frac{1}{6(6+2\alpha)} a_4 = \frac{-a_0}{2^6 \cdot 3! \cdot (1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)} \\ &\vdots \\ a_{2m} &= \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m! (1+\alpha)(2+\alpha)\ldots(m+\alpha)} \end{aligned}$$

דרך הזהות $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ רואים ש-

$$\Gamma(\alpha+m+1) = (m+\alpha)\Gamma(\alpha+m) = \ldots = (m+\alpha)\ldots(1+\alpha)\Gamma(\alpha+1)$$

ולכן

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0 \Gamma(\alpha+1)}{2^{2m}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\alpha+1)}$$

ולכן יש לנו שני פתרונות

$$y_+ = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+i\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+i\nu}, \ y_- = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-i\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-i\nu}$$

הפתרונות האלה הם מרוכבים צמודים. הפתרון הכללי של המשוואה הוא

$$y = Cy_+ + \bar{C}y_-$$

כאשר C הוא קבוע מרוכב. אם כותבים $C = A + iB$ כאשר A, B ממשיים אזי

$$y = (A+iB)y_+ + (A-iB)y_- = A(y_+ + y_-) + iB(y_+ - y_-) = 2A\mathrm{Re}(y_+) - 2B\mathrm{Im}(y_+)$$

כלומר צירוף לינארי ממשי של $\mathrm{Re}(y_+)$ ו- $\mathrm{Im}(y_-)$.

---

3. למשוואות הבאות, העזר בשיטת פרובניוס למצוא פתרון אחד, ותאר את הצורה של הפתרון הכללי:

$$\begin{aligned} x^2 y'' - xy' + (1-x)y &= 0 \\ xy'' + (x-6)y' - 3y &= 0 \end{aligned}$$

(אין צורך למצוא באופן מפורש את הפתרון שני.)

---

4. למשוואת צ'ביצ'ף מסדר n

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$$

(n שלם לא-שלילי), יש פתרון שהוא פולינום מדרגה n, זוגי כאשר n הוא זוגי, ואי-זוגי כאשר n הוא אי-זוגי.

(א) מצא באופן מפורש את הפתרונות הפולינומיים כאשר $n=2$ וכאשר $n=3$.

(ב) על ידי הורדת סדר, מצא את הפתרון הכללי של המשוואה בשני מקרים אלה.

(ג) האם צורות הפתרונות האלה הן עקביות עם תורת פרובניוס ?

(א) במקרה $n=2$ ננסה $y=x^2+a$. יש לנו ש-

$$(1-x^2)y''-xy+4y=2(1-x^2)-2x^2+4(x^2+a)=2+4a$$

ולכן נקח $a=-\frac{1}{2}$ לקבל פתרון $y=x^2-\frac{1}{2}$ או $y=2x^2-1$.
במקרה $n=3$ ננסה $y=x^3+bx$. יש לנו ש-

$$(1-x^2)y''-xy'+9y=6x(1-x^2)-x(3x^2+b)+9(x^3+bx)=6x+8bx$$

ולכן נקח $b=-\frac{3}{4}$ לקבל פתרון $y=x^3-\frac{3}{4}x$ או $y=4x^3-3x$

(ב) אם y_1 הוא פתרון אחד של המשוואה, נחפש פתרון כללי בצורה $y=zy_1$. יש לנו ש-

$$\begin{aligned}(1-x^2)y''-xy'+n^2y &= (1-x^2)(z''y_1+2z'y_1'+zy_1'')-x(z'y_1+zy_1')+n^2zy_1\\ &= (1-x^2)(z''y_1+2z'y_1')-xz'y_1\end{aligned}$$

ולכן יש לדרוש ש-

$$\frac{z''}{z'}+2\frac{y_1'}{y_1}-\frac{x}{1-x^2}=0$$

כלומר

$$\ln z'+2\ln y_1+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)=\ln C$$

או

$$z'=\frac{C}{y_1^2\sqrt{1-x^2}}$$

ולכן

$$z=\int\frac{Cdx}{y_1^2\sqrt{1-x^2}}+D$$

יש לשים לב שאם מציבים $x=\cos\theta$ מקבלים ש-

$$\int\frac{dx}{y_1(x)^2\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{d\theta}{(y_1(\cos\theta))^2}$$

המקרה $n=2$:

$$\int\frac{d\theta}{(2\cos^2\theta-1)^2}=\int\frac{d\theta}{\cos^2 2\theta}=\frac{1}{2}\tan 2\theta+K=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}+K=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1}+K$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$y = C_1(2x^2-1) + C_2 x\sqrt{1-x^2}$$

במקרה $n=3$

$$\begin{aligned}\int \frac{d\theta}{(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)^2} &= \int \frac{d\theta}{\cos^2 3\theta} \\ &= \frac{1}{3}\tan 3\theta + K \\ &= \frac{1}{3}\frac{\sin\theta\,(4\cos^2\theta - 1)}{4\cos^3\theta - 3\cos\theta} + K \\ &= \frac{1}{3}\frac{\sqrt{1-x^2}(4x^2-1)}{4x^3-3x} + K\end{aligned}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$y = C_1(4x^3-3x) + C_2(4x^2-1)\sqrt{1-x^2}$$

(ג) הפתרונות הלא-פולינומיים אינם אנליטיים ב- $x=\pm1$, אבל לא מופיע בהם לוגריתמ-ים. זה יהיה מתאים לתורת פרובניוס אם יש נקודות רגולריות סינגולריות ב- $x=\pm1$ אבל ההפרש בין השורשים של המשוואה המציינת אינו שלם. ואכן אם נציב $z=x-1$ המשוואה היא

$$-(z^2+2z)y'' - (z+1)y' + n^2 y = 0$$

אם משוואה מציינת $-2\alpha(\alpha-1)-\alpha=0$ עם שורשים $\alpha=0,\frac{1}{2}$.

הערות נוספות: הפתרונות הפולינומים נקראים פולינומי צ'ביצ'ף מהסוג הראשון והפונקציות המכפילות את $\sqrt{1-x^2}$ בפתרון השני הם פולינומי צ'ביצ'ף מהסוג השני.

---

5. מצא ומיין את כל הנקודות הסינגולריות, כולל נקודות באינסוף, של המשוואות הבאות:

(א) משוואות הרמיט:

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

(λ קבוע.)

(ב) המשוואה ההיפרגאומטרית

$$x(1-x)y'' + [\gamma - x(1+\alpha+\beta)]y' - \alpha\beta y = 0$$

(α,β,γ קבועים.)

בהצלחה!