

פתרון מבחן מועד ג' בקורס הכנה למתמטיקה לקראת שנת תשפ"ה

תאריך: 14/10/24

מרצה: ד"ר ארז שיינר.

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=)

שאלה 1: נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x > 0 \\ 1 - x^2 & x < 0 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $|f(x)| \geq x - 2$

נשים לב כי f אינה מוגדרת ב $x = 0$, ולכן בוודאי אי השוויון אינו מתקיים בתחום זה.

תחום ראשון: $x \geq 1$

אי השוויון נראה כך:

$$|f(x)| \geq x - 2$$

$$|x^2 - 1| \geq x - 2$$

כיוון ש $x \geq 1$ אזי $x^2 \geq 1$ ולכן אי השוויון נראה כך

$$x^2 - 1 \geq x - 2$$

$$x^2 - x + 1 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

אין שורשים ממשיים, לכן הפרבולה מרחפת, כיוון שהיא מחייכת מתקיים בכל התחום.

בתחום $0 \neq x < 1$

מתקיים כי $x - 2 < 0$ ולכן בוודאי

$$|f(x)| \geq x - 2$$

ולכן אי השוויון מתקיים לכל $x \neq 0$ סה"כ.



שאלה 2: מצאו את כל הפתרונות המרוכבים למשוואה $z^7 = cis(\pi) + cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$

נשים לב כי בצד ימין יש סכום של מספרים בצורה גאומטרית, נעביר אותם לצורה אלגברית ונסכום, ואז נחזור לגאומטריה:

$$cis(\pi) + cis\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + i$$

נעביר לצורה גאומטרית

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2}$$

וכיוון שהחלק הממשי שלילי:

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

כלומר השאלה היא למצוא את השורשים של

$$z^7 = \sqrt{2}cis\left(\frac{3}{4}\pi\right)$$

ולכן שבעת הפתרונות הם

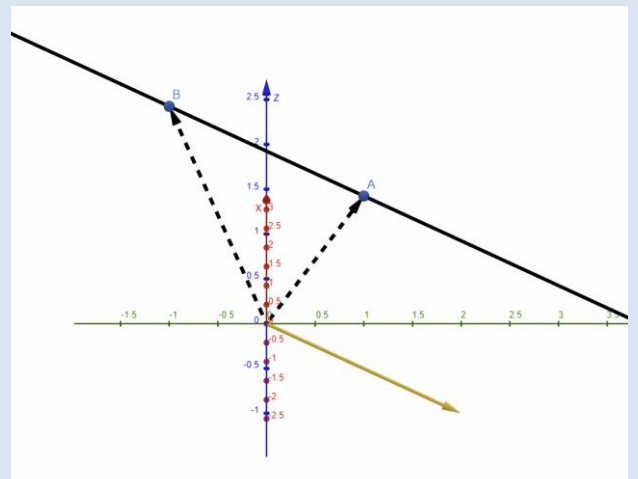
$$z_k = \sqrt[7]{\sqrt{2}}cis\left(\frac{\frac{3}{4}\pi + 2\pi k}{7}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

שאלה 3:

יהי מישור ויהי ישר L_1 כך שהוא מאונך למישור וחותר אותו בנקודה $(1,1,1)$.
עוד נתון כי L_1 עובר בנקודה $(1, -1, 2)$.
מצאו את משוואת המישור.

וקטור בכיוון הישר הוא

$$\vec{v} = (1,1,1) - (1, -1, 2) = (0, 2, -1)$$



כיוון שהישר מאונך למישור, משוואת המישור היא מהצורה

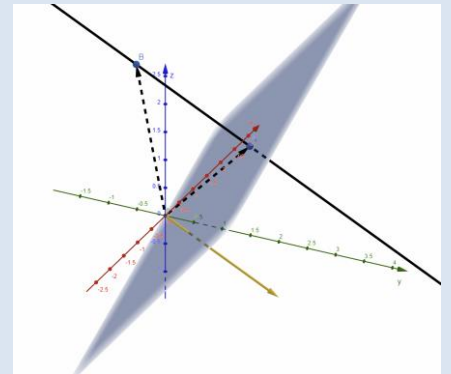
$$0 \cdot x + 2y - z = D$$

ידוע גם שהנק' (1,1,1) נמצאת במישור. נציב אותה במשוואה

$$2 - 1 = D$$

ולכן סה"כ משוואה המישור היא

$$2y - z = 1$$



שאלה 4:

הוכיחו את הטענה הבאה באינדוקציה או בכל דרך אחרת: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{2}$$

בדיקה: עבור $n = 0$ אכן

$$\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1 + \frac{0}{2}$$

יהי n עבורו הטענה נכונה, כלומר נתון

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{2}$$

צ"ל כי

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{2}$$

נפתח את צד שמאל

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \stackrel{\text{הנחת האינדוקציה}}{\geq} \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{n}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3n}{4} \stackrel{WIN}{=} 1 + \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4}n \geq 1 + \frac{n+1}{2}$$

משל.

שאלה 5: פתרו את האינטגרל

$$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx$$

$$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln(x) \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\} = \int \cos(t) dt = \sin(t) + C = \sin(\ln(x)) + C$$

שאלה 6:

הגדרה: תהי X קבוצה של מספרים ממשיים. X נקראת שאפתנית אם

$$\forall a \in X \exists b \in X: a < b$$

א. נסחו תנאי השקול לכך ש X אינה שאפתנית.

ב. קבעו והוכיחו לכל אחת מן הקבוצות הבאות אם היא שאפתנית או לא:

$$Z = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$$

$$Y = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$$

$$X = \mathbb{N}$$

סעיף א: X אינה שאפתנית אם $\exists a \in X \forall b \in X: a \geq b$

סעיף ב:

ראשית נוכיח כי X שאפתנית: יהי $n \in \mathbb{N}$

צריך למצוא $k \in \mathbb{N}$ כך ש

$$n < k$$

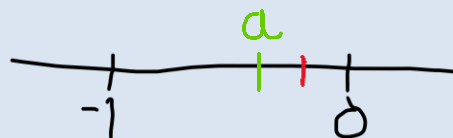
נבחר $k = n + 1 \in \mathbb{N}$

ואכן $n < k$ משל

כעת נעבור ל Y , ונוכיח כי היא שאפתנית.

יהי $a \in Y$ צ"ל שקיים $b \in Y$ כך ש $a < b$

נתון כי $-1 < a < 0$



ניקח את אמצע הקטע $[a, 0]$ שהוא

$$\frac{a+0}{2} = \frac{a}{2}$$

מתקיים

$$-1 < a < \frac{a}{2} < 0$$

ולכן $\frac{a}{2} \in Y$

נבחר $b = \frac{a}{2}$ וסיימנו כי $a < b$

לבסוף Z אינה שאפתנית, נבחר $a = 2$ ואכן לפי ההגדרה לכל $b \in Z$ מתקיים $b \geq 2$ משל.

שאלה 7: הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שלוש קבוצות A, B, C אם $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ אזי $C \setminus B \neq A$.

ב. לכל שלוש קבוצות A, B, C אם $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ אזי $C \setminus (B \setminus A) \neq C$.

סעיף א': נתון שקיים $x \in A \cap B \cap C$

לכן

$$x \notin C \setminus B$$

כי $x \in B$

אבל $x \in A$

ולכן

$$C \setminus B \neq A$$

סעיף ב: הפרכה - נבחר

$$A = B = C = \{0\}$$

אכן

$$A \cap B \cap C = \{0\} \neq \emptyset$$

אבל

$$C \setminus (B \setminus A) = C \setminus \emptyset = C$$