אלגברה מופשטת 3 – תרגול 11

תרגיל:

תהי E/F הרחבת גלואה. ויהיו B,C שדות ביניים מדרגות $2^b,2^c$ בהתאמה (כך ש $b,c\geq 1$).

האם בהכרח $B\vee C$ מדרגה 2^d?

פתרון: נראה דוגמא נגדית.

נתרגם את הבעיה לתורת החבורות: $2^b=[B:F]=[G:H]$ וגם $2^c=[C:F]=[G:K]$ עבור חבורות מתאימות $H,K\leq G=Gal(E/F)$. כבר ראינו שמתקיים $[B\vee C:F]=[G:H\cap K]$. כעת קל יותר לבנות דוגמא נגדית: ניקח $G=S_4$ שהיא חבורת גלואה של שדות מתאימים E/F. ניקח שני שיכונים שונים של S_3 לתוך S_4: H היא ת"ח התמורות שקובעות את 4, ו K היא ת"ח התמורות שקובעות את 1. אזי $H\cap K\cong S_2$ היא מסדר 2. מתקיים $[G:H]=[G:K]=4$, אבל $[G:H\cap K]=12\neq 2^d$.

הגדרות:

הרחבה שורשית: $E=F(a),\ a^n\in F$

הרחבה רדיקלית (שרשרת של הרחבות שורשיות)

פולינום פתיר ע"י רדיקלים (מתפצל בהרחבה רדיקלית)

איבר פתיר ע"י רדיקלים: שייך להרחבה רדיקלית

איבר פתיר ע"י ריבועים: שייך להרחבה רדיקלית כך שכל ההרחבות הן מדרגה 2.

משפט: איבר ניתן לבניה מעל Q אם ורק אם הוא פתיר ע"י ריבועים

מסקנה: אם איבר ניתן לבניה אזי הוא מדרגה 2^n.

תרגיל: הוכיחו או הפריכו, אם איבר הוא מדרגה 2^n מעל $\mathbb{Q}$ האם הוא ניתן לבניה.

פתרון: נראה דוגמא נגדית. $f(x)=x^4-4x+2\in\mathbb{Q}[x]$ הוא פולינום עם חבורת גלואה S_4 (עוד אין לנו את הכלים להוכיח זאת בלי לחשב בפועל את השורשים). כל שורש של הפולינום הוא מדרגה 4 מעל $\mathbb{Q}$. נניח בשלילה שכל השורשים ניתנים לבניה. תהי $H_2\leq S_4$ ת"ח 2-סילו. אזי E^{H_2} הוא שדה ביניים מדרגה 3 מעל $\mathbb{Q}$, ולכן כל איבר בו שאינו רציונלי לא ניתן לבניה, סתירה.לכן אחד השורשים של הפולינום אינו ניתן לבניה.

המשפט הגדול של גלואה: פולינום פתיר ע"י רדיקלים אם ורק אם חבורת גלואה שלו פתירה.

תרגיל: בנה את המצולע המשוכלל בן 17 צלעות.

פתרון: נראה רק את בנית המספר $\rho = cis(2\pi/17)$.

$G = Gal(\mathbb{Q}(\rho)/\mathbb{Q}) \cong U_{17} \cong \mathbb{Z}_{16}$.

היוצר של החבורה U_{17} הוא 3 (הערה מעניינת: 3 הוא היוצר של כל U_p כאשר $p = 2^{2^N}+1$ הוא ראשוני פרמה).

כלומר היוצר של $G = <\sigma>$ כאשר $\sigma : \rho \mapsto \rho^3$.

כעת ניתן ליצור את שרשרת ההרחבות:

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}(\rho) \\ | \\ \mathbb{Q}(\rho)^{<\sigma^8>} \\ | \\ \mathbb{Q}(\rho)^{<\sigma^4>} \\ | \\ \mathbb{Q}(\rho)^{<\sigma^2>} \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

שלב ראשון:

$$\alpha := tr_{\mathbb{Q}(\rho)/\mathbb{Q}^{<\sigma^2>}}(\rho) = \rho + \sigma^2(\rho) + \sigma^4(\rho) + \sigma^6(\rho) ... + \sigma^{16}(\rho) = \rho + \rho^9 + \rho^{13} + ... + \rho^2$$

הפולינום המינימלי של α מעל $\mathbb{Q}$ הוא $m_\alpha(x) = (x-\alpha)(x-\sigma(\alpha)) = x^2 + ax + b$ כאשר $a = -(\alpha + \sigma(\alpha)) = -tr_{\mathbb{Q}(\rho)/\mathbb{Q}}(\rho) = -(-1) = 1$.

$$b = \alpha \cdot \sigma(\alpha) = ... = 4tr(\rho) = -4$$

קיבלנו $m_\alpha(x) = x^2 + x - 4$.

השורשים שלו הם $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. אפשר לבדוק ולראות ש α חיובי ולכן $\alpha = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

שלב שני: $\beta := tr_{\mathbb{Q}(\rho)/\mathbb{Q}^{<\sigma^4>}}(\rho) = \rho + \sigma^4(\rho) + \sigma^8(\rho) + \sigma^{12}(\rho) = \rho + \rho^{13} + \rho^{16} + \rho^4$.

כמו קודם הפולינום המינימלי של β מעל $\mathbb{Q}(\rho)^{<\sigma^2>} = \mathbb{Q}(\sqrt{17})$ הוא $m_\beta(x) = (x-\beta)(x-\sigma^2(\beta))$.

מכאן נקבל ש $-(\beta + \sigma^2(\beta)) = -tr(\rho) = -\alpha$, $\beta\sigma(\beta) = tr(\rho) = -1$.

נקבל $m_\beta(x)=x^2-\alpha x-1$.

מכאן נקבל $\beta=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4}}{2}$.

שלב שלישי: $\gamma := tr_{\mathbb{Q}(\rho)/\mathbb{Q}^{<\sigma^8>}}(\rho)=\rho+\sigma^8(\rho)=\rho+\rho^{16}=\rho+\rho^{-1}$

הפולינום המינימלי של γ מעל $\mathbb{Q}(\rho)^{<\sigma^4>}$ הוא $m_\gamma(x)=(x-\gamma)(x-\sigma^4(\gamma))$.

נקבל $-(\gamma+\sigma^4(\gamma))=-tr(\rho)=-\beta$.

$\gamma\sigma^4(\gamma)=\rho^3+\rho^5+\rho^{12}+\rho^{14}=\sigma(\beta)$.

וקיבלנו $m_\gamma(x)=x^2-\beta x+\sigma(\beta)$.

ונקבל $\gamma=\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-4\sigma(\beta)}}{2}$.

שלב רביעי: הפולינום המינימלי של ρ מעל $\mathbb{Q}(\rho)^{<\sigma^8>}$ הוא
$m_\rho(x)=(x-\rho)(x-\sigma^8(\rho))=(x-\rho)(x-\rho^{-1})=x^2-(\rho+\rho^{-1})x+1=x^2-\gamma x+1$.

השורשים שלו הם $\rho=\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-4}}{2}$. מכאן ניתן לחשב רקורסיבית את ρ.