

בחינה סופית בחשבון אינפיניטסימלי 2 מדמ"ח – 89-133

מועד ב' תשע"ד

מרצה: ד"ר שמעון ברוקס, ד"ר יהודה שנפס

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: מחשבון

ענו על כל השאלות

1. תהינה f, φ שתי פונקציות רציפות בקטע $[x_0, \infty)$ וגזירות לכל $x > x_0$. נתון כי

$$|f'(x)| \leq \varphi'(x)$$

לכל $x > x_0$. הוכח שלכל $x > x_0$ מתקיים

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

2.

(א) הוכח שאם f אינטרבילית על הקטע $[0, 1]$, אזי הפונקציה $|f|$ המוגדרת ע"י ערך מוחלט של f (כלומר, הפונקציה $|f|(x) = |f(x)|$ לכל $x \in [0, 1]$) גם היא אינטרבילית על $[0, 1]$. רמז: ניתן להשתמש בעובדה, הנובעת מאי-שוויון המשולש, שבכל קטע I מתקיים

$$\sup_{x \in I} |f(x)| - \inf_{x \in I} |f(x)| \leq \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x)$$

(ב) זכור כי הפונקציה המאפיינת של הרציונליים מוגדרת ע"י

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

והתבונן בפונקציה $f(x) = 2\chi_{\mathbb{Q}} - 1$. הוכח כי f אינה אינטרבילית על $[0, 1]$, ואילו $|f|$ כן אינטרבילית על $[0, 1]$.

.3

(א) הוכח את "משפט ערך הממוצע האינטגרלי": אם f רציפה בקטע $[a, b]$, אזי קיים $a < c < b$ המקיים

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

(ב) הוכח או הפרד: אם f היא פונקציה אי-זוגית (כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(-x) = -f(x)$), אזי לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

.4

(א) חשב את האינטגרלים הלא-מסויימים:

i.

$$\int \frac{3x}{\sqrt{9+x^2}} dx$$

ii.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$$

(ב) האם

$$\int_e^\infty \frac{\sin x}{x \ln x} dx$$

מתכנס? מתכנס בהחלט? זכור כי $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$.

5. יהי

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$$

(א) לאיזה ערכים של x הטור מתכנס?

(ב) לאיזה ערכים של x הפונקציה f גזירה? הסבר!

6. לכל אחד מהטורים הבאים, קבע באיזה תחום הטור מתכנס:

(א)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$$

(ב)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$$

(ג)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

(ד)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$$

(ה)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^x}$$

7. יהי

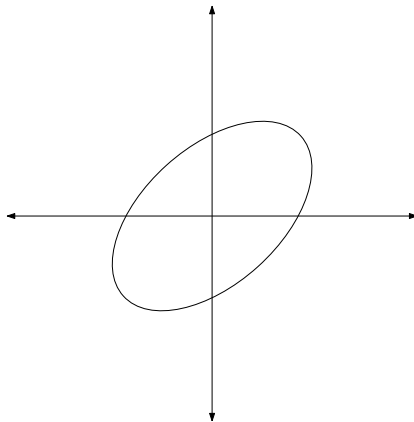
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם f רציפה בכל \mathbb{R}^2 ? האם יש נגזרות חלקיות בכל \mathbb{R}^2 ? האם הנגזרות החלקיות רציפות בכל \mathbb{R}^2 ?

8. מצאו את המקסימום והמינימום (המוחלט) של הפונקציה

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

על האליפסה $x^2 + y^2 - xy \leq 1$ (המצויירת בקירוב למטה).



בהצלחה רבה!