

שאלה 1 (20")

מצא עבור אילו ערכים ממשיים של a, b למערכת משוואות ליניאריות:

$$\begin{aligned}x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x - 3y + az &= 5 \\ 3x - 4y + 5z &= b\end{aligned}$$

(1) אינסוף פתרונות; (2) אין פתרון; (3) פתרון יחיד.

במקרה (1) (אם הוא קיים) מצא את הפתרון הכללי.

שאלה 2 (20")

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

יהיו מעל \mathbb{Z}_7 .

- (א) מצא דרגה של המטריצה A ו $(A|b)$.
- (ב) מהו מימד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax = 0$?
- (ג) מצא בסיס של מרחב הפתרונות של המערכת $Ax = 0$.
- (ד) בדוק שהוקטור $(3, 2, 1, 0)$ הוא פתרון למערכת $Ax = b$, ומצא פתרון כללי למערכת $Ax = b$.

שאלה 3 (20")

יהיו U_1, U_2 שני תת-מרחבים של $P_2[x]$ (מרחב הפולינומים בעלי דרגה ≥ 2):

$$U_1 = \{f(x) \mid f(2) = 0\}, U_2 = \text{span}\{x^2 - 2x, 2x^2 - 4x + 1, 3\}$$

מצא את בסיס ומימד עבור $U_1 \cap U_2, U_1 + U_2, U_2, U_1$.

שאלה 4 (20")

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה הממשיים. ויהיו A, B תתי קבוצות של V .

הוכח או הפוך את הטענה הבאה:

$$\max\{\dim(\text{span}A), \dim(\text{span}B)\} \leq \dim(\text{span}(A \cup B)) \leq \dim(\text{span}A) + \dim(\text{span}B)$$

שאלה 5 (20")

לסמן נכון או לא נכון:

לא נכון	נכון	
		$\dim(A) + \dim(B) = \dim(A+B) + \dim(A \cap B)$
		$V = A + B$ (V – מרכב, A, B – תת-מרכבים) אם"ם ההצגה $v = x + y$, $x \in A, y \in B$ היא יחודית
		כל מטריצה ניתנת להעברה לצורה משולשית על ידי פעולות אלמנטריות
		כל קבוצת וקטורים בלתי תלויים אפשר להרחיב עד בסיס של המרכב
		$(AB)C = A(BC) = C(AB)$ כש C – מטריצה אלכסונית

בהצלחה!