

מבחן מועד ב' – חדו"א 2 לאודיסאה- 86-148 – 26/09/24

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משך המבחן: שלוש שעות

מרצה: דר' ארז שיינר

כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100

ענו על כל השאלות

משקל כל שאלה: 20 נק'

1. נביט בפונקציה הגבול של טור טיילור סביב אפס עם רדיוס התכנסות $R = \infty$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

א. מצאו את טור הטיילור סביב אפס המתכנס ל- $f(x)$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$e^x - e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n}}{(2n+1)!}$$

ב. מצאו את a .

נציב $x = 0$ בטור שמצאנו ולכן

$$a = f(0) = 2$$

2. נביט בסדרת הפונקציות

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n^x}$$

א. מצאו את פונקציה הגבול $f(x)$ של הסדרה, ואת תחום ההגדרה שלה.

אם $x > 1$ אזי $\frac{x^n}{n^x} \rightarrow \infty$ לפי סדרי גודל (במונה יש אקספוננט).

אם $x = 1$ אזי $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

אם $0 < x < 1$ נקבל

$$\frac{x^n}{n^x} \rightarrow \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \rightarrow 0$$

אם $x = 0$ אזי נקבל את הסדרה הקבועה אפס שבוודאי שואפת לאפס.

אם $-1 < x < 0$ אזי $x^n \rightarrow 0$ וכן $n^x \rightarrow \{\infty^-\}$ זה מקרה בעייתי.

$$\frac{x^n}{n^x} = \frac{n^{-x}}{x^{-n}} = \frac{n^{-x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

כאשר $-1 < \frac{1}{x} < \infty$ ולכן $\left|\frac{1}{x}\right|^n \rightarrow \infty$ ושוב לפי סדרי גודל, כיוון שיש אקספוננט במכנה, הגבול של הביטוי הוא אפס.

עבור $x = -1$

$$\frac{(-1)^n}{n^{-1}}$$

מתבדרת בין אינסוף למינוס אינסוף

ועבור $x < -1$

$$|x|^n \rightarrow \infty$$

$$n^{-x} \rightarrow \infty$$

ולכן הסדרה מתבדרת שהרי $\frac{x^n}{n^x} = x^n n^{-x}$

סה"כ פונקצית הגבול היא $f(x) = 0$ ותחום ההגדרה שלה הוא $(-1, 1]$

ב. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בקטע $[0, 1]$. תזכורת: $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$.

נחשב את סדרת החסמים

$$d_n = \sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0,1]} \frac{x^n}{n^x}$$

נחקור את הפונקציה:

$$h(x) = \frac{x^n}{n^x}$$

$$h'(x) = \frac{nx^{n-1}n^x - \ln(n) n^x x^n}{(n^x)^2} = \frac{nx^{n-1} - \ln(n) x^n}{n^x} = \frac{x^{n-1}}{n^x} (n - \ln(n) x)$$

לכן הנקודות החשודות לקיצון מוחלט הן הקצוות $x = 0, 1$ וכן נקודת האיפוס של הנגזרת $x = \frac{n}{\ln(n)}$ (כאשר $n > 1$).

נשים לב כי $\frac{n}{\ln(n)} > 1$ לכל $n > 1$ (אפשר להוכיח, ומכל מקום כיוון ש $\frac{n}{\ln(n)} \rightarrow \infty$ לפי סדרי גודל, זה נכון החל משלב מסויים).

כלומר בקטע $[0, 1]$ המקסימום מתקבל בקצוות.

כעת $h(0) = 0$ ואילו $h(1) = \frac{1}{n}$ ולכן

$$d_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

ולכן סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש.

3. תהי $u(x, y)$ פונקציה דיפרנציאבילית. נביט בפונקציות $h(x) = u(u(x, x), x)$, $g(x) = u(2x, 1 - x)$

א. חשבו את $g'(x)$, הביעו תשובתכם בעזרת u, u_x, u_y .

$$g'(x) = u_x(2x, 1 - x) \cdot 2 + u_y(2x, 1 - x) \cdot (-1) =$$

$$= 2u_x(2x, 1 - x) - u_y(2x, 1 - x)$$

ב. חשבו את $h'(x)$, הביעו תשובתכם בעזרת u, u_x, u_y .

ראשית נשים לב כי

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, x) = u_x(x, x) \cdot 1 + u_y(x, x) \cdot 1$$

ולכן

$$h'(x) = u_x(u(x, x), x) \cdot (u_x(x, x) + u_y(x, x)) + u_y(u(x, x), x) \cdot 1$$

4. יהיו פרמטרים $a, b \in \mathbb{R}$ ותהי פונקציה $f(x, y) = x^2 - y^2 + ax + by$.

נתון כי המישור $z = ax + by + C$ משיק ל $f(x, y)$ בנקודה (x_0, y_0) .

א. מצאו את הנקודה (x_0, y_0) .

מהנתון נובע כי

$$f_x(x_0, y_0) = a$$

$$f_y(x_0, y_0) = b$$

נגזור

$$f_x(x, y) = 2x + a$$

$$f_y(x, y) = -2y + b$$

ולכן

$$2x_0 + a = a$$

$$x_0 = 0$$

$$-2y_0 + b = b$$

$$y_0 = 0$$

ב. מצאו את הקבוע C .

המישור המשיק נפגש עם הגרף בנקודת ההשקה ולכן

$$f(0,0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + C$$

$$C = 0$$

5. נעם הכינה עוגת יום הולדת לנטע, שהתחתית שלה היא התחום $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$

וגובהה הוא $f(x,y) = 1 - x^2$.

מצאו את שטח הפנים של קירות העוגה (לא כולל התחתית והתקרה), ומצאו את נפח העוגה.

לשטח הפנים של הקירות נשתמש באינטגרל קווי מסוג ראשון.

פרמטריזציה של שפת הרצפה C היא

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

ולכן האינטגרל הקווי הוא

$$\int_C f dr = \int_0^{2\pi} f(\cos(t), \sin(t)) \sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2(t)) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2t)) dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

זוהי שטח הפנים של קירות העוגה.

על מנת למצוא את נפח העוגה פשוט נשתמש באינטגרל כפול, ונחליף לקואורדינטות קוטביות

$$\iint_D f dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 - r^2 \cos^2(\theta)) r dr \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r - r^3 \cos^2(\theta)) dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r - r^3 + r^3 - r^3 \cos^2(\theta)) dr \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r - r^3 + r^3(1 - \cos^2(\theta))) dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r - r^3 + r^3 \sin^2(\theta)) dr \right) d\theta$$

נחשב את שני האינטגרלים

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \left(\int_0^1 r^3 dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \stackrel{\text{חישוב לעיל}}{=} \frac{1}{4} \pi$$

סה"כ נפח העוגה הוא $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

6. נסמן ב- M את שטח הפנים העליון של העוגה של נטע:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1, z = 1 - x^2\}$$

נטע שאפה לקראת הנשיפה לכבות את הנרות שעל העוגה, עוצמת לחץ האוויר שיצרה מתואר על ידי השדה הוקטורי

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(-\frac{x}{2}\right)\hat{i} + (z)\hat{j} + \hat{k}$$

חשבו את השטף של האוויר שפגע בעוגה, כלומר את האינטגרל המשטחי מסוג שני

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

כאשר הנורמל $\hat{n}$ מכוון כלפי פנים העוגה.

ניקח פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(x, y) = (x, y, 1 - x^2)$$

$$(x, y) \in D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\vec{s}_x \times \vec{s}_y = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (2x, 0, 1)$$

כיוון שהנורמל מכוון כלפי פנים העוגה, ניקח את המינוס של התוצאה הזו.

לכן נקבל סה"כ כי האינטגרל המשטחי מסוג שני הוא

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = - \iint_D \vec{F}(\vec{s}(x, y)) \cdot (2x, 0, 1) dx dy = - \iint_D \left(-\frac{x}{2}, 1 - x^2, 1\right) \cdot (2x, 0, 1) dx dy =$$

$$= - \iint_D (-x^2 + 1) dx dy \stackrel{\text{קואורדינטות קוטביות}}{=} - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (-r^2 \cos^2(\theta) + 1) r dr \right) d\theta =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-r^3 \cos^2(\theta) + r) dr d\theta = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^3 - r^3 \cos^2(\theta) + r - r^3) dr d\theta =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \sin^2(\theta) dr d\theta + \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r^3 - r) dr \right) d\theta$$

נחשב את שני האינטגרלים:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \sin^2(\theta) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \int_0^1 r^3 dr d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \stackrel{\text{שאלה קודמת}}{=} \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r^3 - r) dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^2}{2} \right]_0^1 d\theta = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = -\frac{\pi}{2}$$

סה"כ עוצמת השטף היא $-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$