הרצאה 23

לפני שני שיעורים התבוננו בשני דוגמאות:

1) $\hat{R}=L[[x]]$ טורי חזקות מעל שדה L.

2) $\mathbb{Z}_p$ שלמים p-אדיים.

ראינו שלשניהם היה מבנה פשוט:

• אידאל מקסימלי (יחיד) $\hat{I}$ ראשי (x) במקרה 1, (p) במקרה 2

וכל שאר האידאלים הלא-אפסיים היו חזקות של $\hat{I}$. יהי π יוצר של $\hat{I}$.

אזי לכל $0\neq x\in\hat{R}$ ניתן לרשום בצורה $x=u\pi^n$ כאשר $0\leq n$, $u\in\hat{R}$ הפיך.

התחומים האלה הם תחומי שלמות, יהי $\hat{F}=\mathrm{Frac}\,\hat{R}$, גם להם מבנה פשוט. כל איבר לא-אפסי של $\hat{F}$

הינו $\frac{x}{y}=\frac{u\pi^n}{u'\pi^m}=\underbrace{\left(\frac{u}{u'}\right)}_{\text{הפיך ב-}\hat{R}}\pi^{n-m}$ $\quad x,y\in\hat{R}$

לכן כל איבר של $0\neq z\in\hat{F}$ הינו מן הצורה,

$z=u\pi^n$, כאשר $u\in\hat{R}^*$, $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $v(z)=n$

($\hat{R}^*=$ הקבוצה של האיברים ההפיכים של $\hat{R}$)

באופן טבעי, נגדיר פונקצית מרחק על $\hat{F}$:

נבחר $0<\tau<1$,

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ \tau^{v(x-y)}, & x\neq y\end{cases}$$

כי פונקצית מרחק מגדירה טופולוגיה מטרית.

<u>מקרה 1</u>

$$\hat{F}=\{x^n \underbrace{u}_{\text{טור מקלורן עם איבר חופשי לא אפסי}}\}\cup\{0\}=\Big\{\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nx^n}_{\text{טורי לורן Laurent}}\ \Big|\ \text{קיים } k\in\mathbb{Z} \text{ כך ש- } a_n=0 \text{ לכל } n<k\Big\}$$

<u>מקרה 2</u>

$$\mathrm{Frac}\,\mathbb{Z}_p=\mathbb{Q}_p$$

שדה של מספרים p-אדיים.

<u>שאלה</u> האם אלה מקרים של תופעה כללית?

<u>הגדרה</u> יהי F שדה. ערך מוחלט על F הינו
פונקציה $|\cdot|: F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

שמקיימת את התכונות הבאות:

1) $|x|=0 \iff x=0$

2) $|xy| = |x|\cdot|y|$ לכל $x,y\in F$. $\Leftarrow$ $|1|=1$, $|-1|=1$, $|x|=|-x|$ לכל $x\in F$

3) $|x+y| \leq |x|+|y|$ לכל $x,y\in F$.

<u>דוגמאות</u> 0) הערך המוחלט הרגיל על $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$.
מסמנים אותו $|\cdot|_\infty$.

1) F שדה כלשהו. ערך מוחלט טריוויאלי:

$$|x| = \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1, & x\neq 0 \end{cases}$$

2) הערך המוחלט ה-p-אדי. $F=\mathbb{Q}$, p ראשוני:

$$x = \frac{m}{n} = \frac{p^a m'}{p^b n'} = p^{a-b}\cdot\frac{m'}{n'}$$

$p\nmid m'$, $p\nmid n'$

נגדיר $|x|_p = \frac{1}{p^{a-b}}$.

כדי לבדוק את התנאי 3 נניח: לכל $x,y\in\mathbb{Q}$,
$|x+y|\le \max\{|x|,|y|\}$.

בהינתן ערך מוחלט על שדה, אפשר להגדיר טופולוגיה ולהשלים אותה:

$$\hat{F} = \{\text{סדרות קושי}\} \Big/ \left\{\begin{matrix}\text{סדרות}\\ \text{אפיסות}\end{matrix}\right\}$$

ההשלמה של $\mathbb{Q}$ ביחס ל-$|\cdot|_\infty$ הינו $\mathbb{R}$
" " עבור $|\cdot|_p$ הינו $\mathbb{Q}_p$.

<u>הגדרה</u> יהי $|\cdot|$ ערך מוחלט על שדה F. נזכור שלכל $n\in\mathbb{N}$ הייצוג $n_F = \underbrace{1_F+1_F+1_F+\dots+1_F}_{n\ \text{פעמים}}$.

הערך המוחלט $|\cdot|$ נקרא לא-ארכימדי אם קיים N כך ש- $|n_F|\le N$ לכל $n\in\mathbb{N}$

דוגמאות של ערך מוחלטים לא ארכימדיים:

1) כל ערך מוחלט של שדה עם מאפיין חיובי.

2) הערך המוחלט ה-פ-אדי של $\mathbb{Q}$.

$$n = p^m n', \quad m \geq 0$$

$$|n|_p = \frac{1}{p^m} \leq 1.$$

ערך מוחלט שאינו לא-ארכימדי נקרא ארכימדי.

לדוגמא, $|\cdot|_\infty$.

<u>טענה</u> יהי $|\cdot|$ ערך מוחלט על F. הוא לא-ארכימדי אם ורק אם הוא מקיים את אי-שוויון המשולש החזק

$|x+y| \leq \max\{|x|,|y|\}$ לכל $x,y\in F$.

<u>הוכחה</u> ($\Rightarrow$) נניח אי שוויון חזק. אזי

$$|2_F| = |1_F + 1_F| \leq \max\{|1_F|,|1_F|\} = 1$$

באינדוקציה, $|n_F| \leq 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) נניח $|n_F| \leq N$ לכל $n\in\mathbb{N}$. יהיו

$x,y\in F$. בלי הגבלת הכלליות $|x| \geq |y|$. אזי

$$|x+y|^k = |(x+y)^k| = \left|\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}_F x^j y^{k-j}\right| \overset{\beta}{\le}$$

$$\sum_{j=0}^{k} \left|\binom{k}{j}_F\right| |x|^j |y|^{k-j} \le \sum_{j=0}^{k} N|x|^k = N(k+1)|x|^k$$

וניקח שורש k-י:

$$|x+y| \le N^{1/k}(k+1)^{1/k}|x|$$

לכל k. ונשאיף $k\to\infty$

$$|x+y| \le \lim_{k\to\infty} \underbrace{N^{1/k}(k+1)^{1/k}}_{\to 1}|x| = |x| = \max\{|x|,|y|\}.$$

ערכים מוחלטים לא-ארכימדיים טובים יותר מארכימדיים.

<u>תרגיל</u> יהי F שדה עם ערך מוחלט לא-ארכ' ושלם לטופולוגיה המושרית (כל סדרת קושי מתכנסת).

אזי הטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ $(a_k\in F)$ מתכנס

אם ורק אם $a_k \to 0$.

טענה: יהי F שדה עם $|\cdot|$ לא ארכימדי.
$R=\{x\in F : |x|\le 1\}$ הוא חוג.

הוכחה: סגור לחיבור בגלל אי-שוויון החזק.
הוא נקרא חוג ההערכה של $|\cdot|$.

טענה: R הינו חוג מקומי. האידיאל המקסימלי
הינו $I=\{x\in F : |x|<1\}$.

הוכחה: ברור כי I אידיאל. צריך להוכיח
שכל $x\in R\setminus I$ הינו הפיך ב-R. ברור
כי $|x|=1$, לכן $\frac{1}{x}\in F$

$$\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{|1|}{|x|}=1 \Rightarrow \frac{1}{x}\in R.$$

הערה: שני ערכים מוחלטים על F נקראים
שקולים אם הם מגדירים את אותה
הטופולוגיה המטרית.
ברור כי $|\cdot|_\infty$, $|\cdot|_p$ עבור p-ים שונים
לא שקולים.

משפט (אוסטרובסקי, 1916). יהי $|\cdot|$ ערך מוחלט לא טריוויאלי על $\mathbb{Q}$. אזי הוא שקול ל-$|\cdot|_\infty$ או ל-$|\cdot|_p$ עבור p ראשוני.

מסקנה ההשלמות של $\mathbb{Q}$ הם $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}_\infty$ ~) ו-$\mathbb{Q}_p$ עבור p ראשוניים.

תרגיל (נוסחת המכפלה). יהי $0\neq x\in\mathbb{Q}$. אזי

$$\left(\prod_p |x|_p\right)\cdot|x|_\infty = 1$$

הוכחה של אוסטרובסקי

מקרה 1 נניח כי $|\cdot|$ לא ארכימדי. אזי $|n|\le 1$ לכל $n\in\mathbb{Z}$ מן ההוכחה של הטענה הקודמת. אם $|n|=1$ לכל $0\neq n\in\mathbb{Z}$, אזי $|\cdot|$ הנו טריוויאלי, בניגוד להנחה. לכן

$$\{0\}\subsetneq\{n\in\mathbb{Z} : |n|<1\}$$

הקבוצה הנ"ל היא אידיאל ראשוני של $\mathbb{Z}$,

כלומר $\{n\in\mathbb{Z} : |n|<1\} = p\mathbb{Z}$ עבור

הראשוני p.

לכל $n\in\mathbb{Z}$, אם

$$n = p^a n', \quad p\nmid n'$$

$$|n| = |p|^a \underbrace{|n'|}_{1} = |p|^a$$

$$\left|\frac{m}{n}\right| = \left|\frac{p^a m'}{p^b n'}\right| = |p|^{a-b} = \left|\frac{m}{n}\right|_p^s$$

כלומר אם $s>0$ מקיים $|p|_p^s = \left(\frac{1}{p}\right)^s = |p|$.

לכן $|\cdot|, |\cdot|_p$ שקולים.

מקרה 2: $|\cdot|$ ארכימדי, צריך להוכיח שהוא שקול ל-$|\cdot|_\infty$.

לכל $x\in\mathbb{Q}$, נגדיר

$$v_p(x) = -\log_p |x|_p$$

$$v_p(x) = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ c, & x = p^c \frac{m'}{n'} \end{cases}$$

valuation

הערכה ה-p-אדית.

$$v(xy) = v(x)+v(y)$$

$$v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$$

אם $x\in\mathbb{Z}$, אזי

$$v(x)=\max\{n:\ x\in (p\mathbb{Z})^n\}.$$

<u>הגדרה</u> חבורה סדורה היא חבורה אבלית G עם יחס סדר מלא כך ש- $g_1\le g_2 \Leftarrow$ $g_1+h\le g_2+h$ לכל $h\in G$.

Krull

<u>הגדרה</u> יהי F שדה. הערכה (הערכה של קרול) על F היא פונקציה

$$v: F\longrightarrow G\cup\{\infty\},$$

כאשר G חבורה סדורה, $\infty>g$ לכל $g\in G$, $\infty+g=\infty$ שמקיימת את התנאים הבאים:

1) $v(x)=\infty \iff x=0$.

2) $v(xy)=v(x)+v(y)$ לכל $x,y\in F$.

3) $v(x+y)\ge\min\{v(x),v(y)\}$.

<u>דוגמא</u> v_p היינו הערכה.

<u>תרגילים</u> 1) בהינתן שדה F עם הערכה v,

$R = \{x \in F : v(x) \geq e_G\}$ היינו חוג מקומי

עם אידאל מקסימלי

$$I = \{x \in F : v(x) > e_G\}$$

2) אם $v(y) \neq v(x)$, אזי

$$v(x+y) = \min\{v(x), v(y)\}$$