פתרון תרגיל בית מספר 5

<u>תרגיל 3.3</u>

נפתור רק את סעיף ב': יהיו $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{F}^{k\times l},C\in\mathbb{F}^{h\times r}$. $B+C$ מוגדר אם ורק אם $k=h, l=r$ ואז $B+C\in\mathbb{F}^{k\times l}$. $A(B+C)$ מוגדר אם ורק אם $n=k$ ואז $A(B+C)\in\mathbb{F}^{m\times l}$. עפ"י הנ"ל נקבל $AB, AC\in\mathbb{F}^{m\times l}\Rightarrow AB+AC\in\mathbb{F}^{m\times l}$ ובסה"כ קיבלנו כי אם $A(B+C)$ מוגדרת אז גם $AB+AC$ מוגדרת וכן סדר המטריצות שווה. באופן דומה ניתן להוכיח ש אם $AB+AC$ מוגדרת אזי $A(B+C)$ מוגדרת והסדרים של המטריצות שווים.

נראה שוויון האיברים במקומות ה i,j בשתי המטריצות. נסמן $B+C=D$ אזי

$$\left(A(B+C)\right)_{ij}=\left(AD\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}d_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(b_{kj}+c_{kj}\right)\underset{(*)}{=}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj})=$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}=\left(AB\right)_{ij}+\left(AC\right)_{ij}$$

השוויון $(*)$ נובע מחוק הפילוג בשדה.

<u>תרגיל 4.2</u>

נפתור רק את סעיף ב'.

אם $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{F}^{n\times k}$ אזי $A^t\in\mathbb{F}^{n\times m}$, $B^t\in\mathbb{F}^{k\times n}$, ולכן הכפל B^tA^t מוגדר היטב והתוצאה מקיימת $B^tA^t\in\mathbb{F}^{k\times m}$. ניתן לראות גם כי $(AB)^t\in\mathbb{F}^{k\times m}$.

$$\left(ab\right)^{t}_{ij}=\left(ab\right)_{ji}=\sum_{p=1}^{n}a_{jp}b_{pi}=\sum_{p=1}^{n}\left(a^t\right)_{pj}\left(b^t\right)_{ip}=\sum_{p=1}^{n}\left(b^t\right)_{ip}\left(a^t\right)_{pj}=(b^ta^t)_{ij}$$

השתמשנו רק בהגדרת המטריצה המשוחלפת, בהגדרת כפל מטריצות ובעובדה שכפל בשדה הוא חילופי.

<u>תרגיל 4.3</u>

$A^t\in\mathbb{F}^{n\times m}$ $\Leftrightarrow$ $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, מכיוון ש $A=A^t$ נקבל ש $m=n$.

<u>תרגיל 4.6</u>

א. נתון שמטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ היא סימטרית: $A^t=A$, וגם אנטי סימטרית, כלומר $A^t=-A$ ולכן בסה"כ נקבל $A=-A\Rightarrow 2A=0$. כיון ש- $\mathbb{R}$ הוא ממאפיין 0, נקבל $A=0$.

ב. בכל שדה קיימים האיברים $0,1$ ולכן קיימת מטריצת היחידה I. לפי הנתון מתקיים $I=-I$ ולכן $2I=0$. בפרט, $1+1=0$ ולכן המאפיין של השדה הוא 2.

<u>תרגיל 5.1</u>

נניח ש - $A\in F^{n\times m}$, לכן $A^t\in F^{m\times n}$. אם נכפיל את שתי המטריצות, נקבל לפי הגדרת הכפל $AA^t\in F^{m\times m}$ ולכן היא ריבועית.

<u>תרגיל 5.2</u>

נוכיח כיוון אחד, למשל: $AI=A$.

נשים לב כי- $I=\left(e_1\ e_2\ ...\ e_n\right)$ (ז"א מטריצה אשר עמודותיה הן ווקטורי העמודה e_i). כעת לפי תרגיל 3.6 אנחנו מקבלים:

$$AI=A\left(e_1\ e_2\ ...\ e_n\right)=\left(Ae_1\ \ Ae_2\ ...\ \ Ae_n\right)=\left(C_1\left(A\right)...C_n\left(A\right)\right)=A$$

וקיבלנו בדיוק את הדרוש!