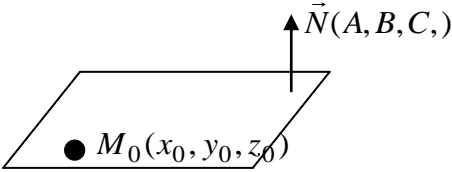


גיאומטריה אנליטית במרחב



I מישור

1. המשוואה הכללית של מישור : $Ax + By + Cz + D = 0$
2. המשוואה של מישור שעובר דרך הנקודה $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ומאונך לוקטור $\vec{N}(A, B, C)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
3. זווית בין מישורים (1), (2) אם \vec{N}_1, \vec{N}_2 וקטורים מאונכים למישורים (1), (2) :

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|}$$
 (א) אם $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$ כלומר $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ אזי מישורים מקבילים
 (ב) אם $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$ כלומר $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ אזי מישורים מאונכים
4. מרחק מנקודה $M_0(x_0, y_0, z_0)$ למישור $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

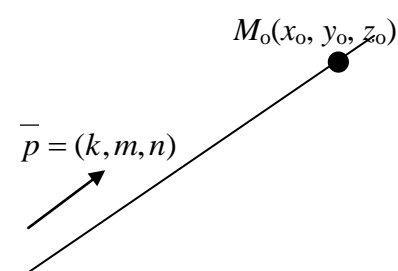
II ישר במרחב

1. ישר כחיתוך של שני מישורים (משוואה כללית)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$
2. משוואה קנונית של הישר $\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$
3. משוואה פרמטרית של הישר

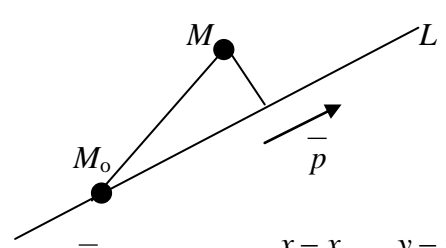
$$\begin{cases} x = x_0 + kt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$
4. ישר העובר דרך שתי נקודות $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$



5. זווית בין הישרים $\cos \alpha = \frac{|\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2|}{|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|}$
6. מרחק מנקודה M לישר L :

$$d = \frac{|M_0M \times \vec{p}|}{|\vec{p}|}$$



III מצב הדדי של ישר ומישור נתונים הישר $\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$, $\vec{p} = (k, m, n)$ והמישור $Ax + By + Cz + D = 0$, $\vec{N} = (A, B, C)$

1. הישר מקביל למישור (כלומר $\vec{N} \perp \vec{p}$) $Ak + Bm + Cn = 0$
2. הישר מאונך למישור (כלומר $\vec{N} \parallel \vec{p}$) $\frac{A}{k} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$
3. זווית בין ישר למישור $\sin \alpha = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{p}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{p}|}$

תרגילים :

1. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $(3, -2, 5)$ ומאונך לוקטור $(4, -3, 1)$.
2. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודות $(1, 2, -1)$ ו- $(-5, 2, 7)$ ומקביל ל-
 א. ציר x ב. ציר y ג. הוקטור $2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$
3. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודות:
 א. $(4, 1, 1), (2, 3, 1), (1, 0, -1)$ ב. $(0, 1, -5), (1, -2, 2), (2, 0, -1)$.
4. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $(1, -1, 2)$ ומקביל למישור המשולש בעל הקודקודים
 $C(3, 0, 1), B(-1, 2, 3), A(1, 0, 0)$.
5. חשב את המרחק מהנקודה $A(3, 9, 1)$ למישור $x - 2y + 2z - 5 = 0$.
6. על הציר x מצא נקודה הנמצאת במרחק שווה מן המישורים
 $2x + 2y - z = 1, 12x - 16y + 15z + 1 = 0$.
7. מצא את משוואת המישור המקביל למישור $3x + 6y - 2z = 7$ שמרחקו מהנקודה $(1, -1, 2)$ שווה ל-3.
8. חשב נפח הפירמידה החסומה על ידי המישורים $z = 0, y = 0, x = 0, 3x - 6y + 2z = 12$.
9. מצא את קוסינוס הזווית החדה בין המישורים $x + 2y + 2z + 1 = 0, 15x + 12y - 16z = 1$.
10. עבור אילו ערכים של α המישורים $2x + \alpha y + z = 1, 2x + y + z = 3$
 א. מאונכים, ב. מקבילים?
11. חשב את המרחק בין שני מישורים מקבילים: $4x + 6y - 12z + 16 = 0, 2x + 3y - 6z + 5 = 0$.
12. מצא את משוואת הישר העובר דרך
 א. הנקודות $(3, 5, 2), (2, 1, 3)$
 ב. הנקודה $(2, 1, 4)$ ומקביל לוקטור $\vec{p} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}$
 ג. הנקודה $(3, 1, -2)$ המאונכת למישור $x + y - 2z = 2$.
13. מצא את משוואת המישור העובר דרך שני הישרים המקבילים
 $\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-2}, \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{-2}$.
14. מצא זווית בין ישרים $\left. \begin{matrix} 2x - y + 3z = 1 \\ 5x + 4y - z = 7 \end{matrix} \right\}^{-1} \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+5}{3}$.
15. חשב את המרחק מנקודה $(1, -1, 3)$ לישר $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$.
16. מצא את משוואת הישר העובר דרך נקודה $(1, 1, 1)$ ומאונך לוקטורים:
 $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = (3, 1, 2)$
17. מצא את נקודת החיתוך של הישר $\frac{x+4}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ והמישור $2x + 3y - z = 5$.
18. מצא היטל של הנקודה $A(2, -3, 4)$ על המישור $x + 2y + 2z = 13$.
19. כתוב את המשוואה הקנונית של הישר הנתון על ידי שני המישורים:
 $x - y + 3z = 1, 3x + 2y - z - 3 = 0$
20. מצא נקודה סימטרית לנקודה $P(2, -3, 4)$ ביחס למישור $3x + 4y + 5z + 36 = 0$.
21. מצא נקודה סימטרית לנקודה $P(4, 3, 10)$ ביחס לישר $x = 1 + 2t, y = 2 + 4t, z = 3 + 5t$.
22. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $(0, 1, -1)$ המקביל לקו החיתוך של המישורים:
 $3x + y - 2z = 2, 2x - y + 3z + 7 = 0$
23. הוכח כי הישרים $x = 2t - 3, y = 3t - 2, z = 6 - 4t$ ו- $x = t + 5, y = -4t - 1, z = t - 4$ נחתכים.
 מצא את נקודת החיתוך.
24. יהי D המישור המוגדר ע"י המשוואה $7x + 3y + 2z = 1$. מצא את הנקודה Q במישור D הקרובה ביותר לנקודה $P(1, 0, -1)$; הרכב את משוואת הישר העובר דרך הנקודות P ו- Q ; וחשב המרחק PQ .

25. נתונות 4 נקודות במרחב : $A(0,2,4); B(-2,6,-2); C(2,-4,8); D(10,2,0)$. הרכב את משוואת הישר AK כאשר K זה היטלה של D על המישור ABC .

גיאומטריה אנליטית במישור

26. צייר את הגרפים של הקווים הבאים :

$a. x^2 + y^2 = 5$ $b. x^2 + y^2 = 4x$ $c. x^2 + y^2 = 6y$ $d. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
 $e. \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$ $f. 4x^2 - 9y^2 = 36$ $g. 4x^2 - 9y^2 = -36$ $h. y = 2(x-1)^2 - 3$
 $i. x = -0.5(y+1)^2 + 4$ $j. 2y + x^2 - 4x = 6$

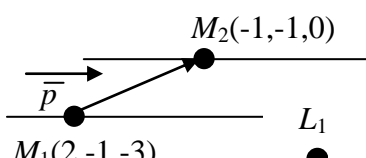
תשובות :

1) $4x - 3y + z = 23$ 2) א. $y = 2$ ב. $4x + 3z = 1$ ג. $4x + 5y + 3z = 11$
 3) א. $x + y - 2z - 3 = 0$ ב. $x - 2y - z - 3 = 0$
 4) $x + 4y - 2z + 7 = 0$ 5) 6 6) $(2,0,0), (11/43,0,0)$
 7) $3x + 6y - 2z = 14, 3x + 6y - 2z + 28 = 0$ 8) 8 9) $7/75$ 10) $\begin{cases} \text{א. } \alpha = -5 \\ \text{ב. } \alpha = 1 \end{cases}$
 11) $3/7$ 12) א. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 4t \\ z = 3 - t \end{cases}$ ב. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 5t \\ z = 4 + 8t \end{cases}$ ג. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$ 13) $3x - 2y + 3z + 1 = 0$
 14) $\cos \alpha = \frac{34}{\sqrt{8106}}$ 15) $\sqrt{\frac{69}{14}}$ 16) $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 7t \end{cases}$ 17) $(-3,3,-2)$ 18) $(3,-1,6)$
 19) $x = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ 20) $(-4,-11,-6)$ 21) $(2,9,6)$ 22) $x = \frac{y-1}{-13} = \frac{z+1}{-5}$ 23) $(3,7,-6)$
 24) $Q\left(\frac{17}{31}, \frac{-6}{31}, \frac{-35}{31}\right), (PQ): \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, PQ = \frac{4}{\sqrt{62}} = \frac{2\sqrt{62}}{31}$ 25) $(AK): \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

פתרונות :

4. $\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,8,-4) \Rightarrow \bar{N} = (1,4,-2), 1(x-1) + 4(y+1) - 2(z-2) = 0$

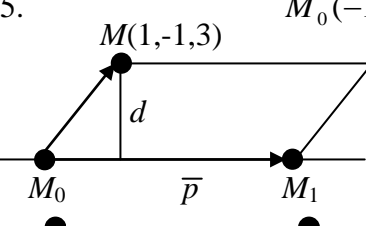
11. $d = \frac{|-8+0-0+5|}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}$ לכן $(-4,0,0)$ למשל, $4x + 6y - 12z + 16 = 0$ מישור על נקודה על מישור

13. 

$$\vec{p} \times \overline{M_1 M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (9, -6, 9) \Rightarrow N = (3, -2, 3)$$

$$3(x-2) - 2(y+1) + 3(z+3) = 0$$

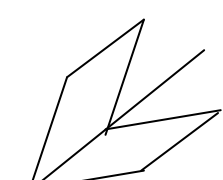
14. $\vec{p}_{l_1} = (2, 1, 3), \vec{p}_{l_2} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-11, 17, 13), \cos \alpha = \frac{\vec{p}_{l_1} \cdot \vec{p}_{l_2}}{|\vec{p}_{l_1}| \cdot |\vec{p}_{l_2}|} = \frac{34}{\sqrt{8106}}$

15. 

$$M_0(-1, 2, 1), \overline{M_0 M_1} = \vec{p} = (2, -1, 3), \quad \overline{M_0 M} = (2, -3, 2)$$

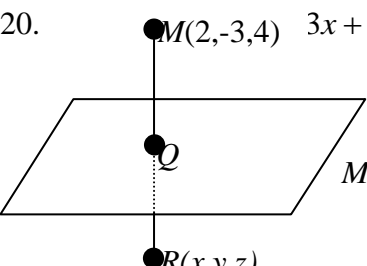
$$\overline{M_0 M} \times \vec{p} = (-7, -2, 4), d = \frac{|\overline{M_0 M} \times \vec{p}|}{|\vec{p}|} = \sqrt{14}$$

18.
$$\begin{cases} (t+2) + 2(2t-3) + 2(2t+4) = 13 \\ t = 1 \\ x = 3, y = -1, z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 13 \\ x = t + 2 \\ y = 2t - 3 \\ z = 2t + 4 \end{cases} \quad (\text{ב}) \quad \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t - 3 \\ z = 2t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{p} = (1, 2, 2) \quad (\text{א})$$

19. 

$$\vec{p} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (5, -10, -5) \quad (\text{א}) \text{ הוקטור בכיוון הישר}$$

$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ (ב) נקודה על הישר אם $(0, 2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y + 3z = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$. לכן משוואת הישר היא

20. 

$$3x + 4y + 5z = -36 \quad (\text{א}) \text{ משוואת הישר } MR \text{ המאונך למישור}$$

$$(MR) \quad x = 3t + 2, y = 4t - 3, z = 5t + 4$$

(ב) נקי' חיתוך הישר והמשור : $Q(-1, -7, -1), t = -1$

(ג) $MQ = RQ \Rightarrow \frac{x+2}{2} = -1, \frac{y-3}{2} = -7, \frac{z+4}{2} = -1 \Rightarrow R(-4, -11, -6)$