

מבחן מועד ב' – חדו"א 2 - 83-114 – 11/09/25

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משך המבחן: שלוש שעות

מרצה: דר' ארז שיינר

כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100

ענו על כל השאלות

משקל כל שאלה: 20 נק'

1. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{x} & x \neq 0 \\ \frac{x}{2} & x = 0 \end{cases}$$

א. מצאו את טור הטיילור סביב אפס המתכנס ל- $f(x)$.

ב. חשבו את $f^{(12)}(0)$.

2. נביט בסדרת הפונקציות המוכרת

$$f_n(x) = x^n - x^{2n}$$

א. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בקטע $(-1, 1)$.

ב. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בקטע $(-a, a)$, כאשר $0 < a < 1$ קבוע.

3. תהי $u(x, y)$ פונקציה דיפרנציאבילית ותהי $f(x)$ פונקציה גזירה.

א. חשבו את הנגזרת של הפונקציה $g(x) = f(u(2x, -x))$, הביעו תשובתכם באמצעות u, u_x, u_y, f, f' לפי הצורך.

ב. חשבו את הנגזרת של הפונקציה $h(y) = u(f(y), u(y, y))$, הביעו תשובתכם באמצעות u, u_x, u_y, f, f' לפי הצורך.

4. נביט בפונקציה $f(x, y) = x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2$

א. מצאו את משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1, 2)$.

ב. מצאו את הערך המקסימלי והערך המינימלי של $f(x, y)$ בתחום $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

5. ליאן ומיתר אפו עוגת גזר בתבנית עגולה שבסיסה הוא $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

העוגה תפחה בצורה מעט מוזרה, וגובה העוגה בכל נק' הוא $f(x, y) = x^2y^2 + 1$.

א. חשבו את נפח העוגה.

ב. חשבו את שטח הפנים של קירות העוגה (לא כולל הגג).

6. נביט בעוגת הגזר של ליאן ומיתר משאלה 5, ונסמן את המעטפת של העוגה ב- M (כולל הרצפה, הקירות, והגג).

יהי שדה וקטורי $\vec{F} = (x, y, z)$ חשבו את האינטגרל המשטחי מסוג שני

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

כאשר הנורמל פונה כלפי חוץ העוגה.

הערה: מותר להשתמש בעובדה כי $\int_0^{4\pi} \sin^2(x) dx = 2\pi$

טורי טיילור

מקדמי טיילור וטורים ידועים

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

גזירות בשני משתנים

דיפרנציאביליות

הפונקציה $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0, y_0) אם

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x+a, y+b) - f(x, y) - f_x(x, y) \cdot a - f_y(x, y) \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

משוואת מישור משיק

נוסחא כללית לחישוב מישור משיק לפונקציה הגזירה $f(x, y)$ בנקודה (x_0, y_0, z_0) כאשר $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

גרדיאנט ונגזרת כיוונית

הגרדיאנט של הפונקציה $f(x, y)$ בנקודה (x_0, y_0) הוא

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

נגזרת הכיוונית של הפונקציה $f(x, y)$ בנקודה (x_0, y_0) בכיוון $\vec{v}$ היא

$$f'_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

כלל השרשרת

תהי $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ותהיינה $x(t), y(t)$ גזירות. נביט בפונקציה המורכבת $h(t) = f(x(t), y(t))$ אזי

$$h'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

קיצון מקומי ומוחלט

נקודות חשודות (קריטיות) לקיצון מקומי

נקודות בהן הגרדיאנט מתאפס

$$\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) = (0, 0)$$

מבחן הנגזרת השנייה

לכל נקודה חשודה נבצע את התהליך הבא:

1. נחשב את $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$

2. אם $\Delta(x, y) < 0$ מדובר בנקודת אוקף, כלומר נקודה חשודה שאינה קיצון מקומי

3. אם $\Delta(x, y) > 0$ מדובר בקיצון מקומי

א. אם $f_{xx}(x, y) > 0$ מדובר במינימום מקומי

ב. אם $f_{xx}(x, y) < 0$ מדובר במקסימום מקומי

מציאת קיצון מוחלט

בהנתן פונקציה $f(x, y)$ ותחום D נרצה למצוא את הערך המקסימלי והערך המינימלי של $f(x, y)$ כאשר $(x, y) \in D$.

1. נאסוף נקודות חשודות מפנים התחום, אלה נקודות בתחום בהן הגרדיאנט מתאפס.

2. נאסוף נקודות חשודות משפת התחום באמצעות כופלי לגראנז':

א. נתאר את שפת התחום D ע"י המשוואה $g(x, y) = 0$

ב. נפתור את מערכת המשוואות בשלושת הנעלמים (x, y, λ)

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

ג. לכל פתרון (x, y, λ) הנקודה (x, y) היא נקודה חשודה על הקצה

3. נאסוף נקודות חשודות משפת התחום עבורן $g(x, y) = 0$ וכן $\nabla g(x, y) = (0, 0)$.

4. נציב את כל הנקודות החשודות משני הסעיפים הקודמים בפונקציה, ונראה מה הכי גבוה ומה הכי נמוך.

אינטגרלים במישור ובמרחב

אינטגרלים כפולים

יהי תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על D כרצפה, ועל f כגובה התקרה, והאינטגרל $\iint_D f dx dy$ מייצג את נפח הבית.

כמו כן, אפשר לחשוב על D כמשטח, ועל f כצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של המשטח.

בנוסף, $\iint_D 1 dx dy$ הוא השטח של התחום D .

חישוב אינטגרלים כפולים

אם

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

אזי

$$\iint_D f dx dy = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

שינוי קואורדינטות על אינטגרלים כפולים

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right|$$

$$(x, y) \in D \quad (u, v) \in D'$$

אזי

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J| du dv$$

קואורדינטות קוטביות

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$|J| = r$$

$$(x, y) \in D \quad (r, \theta) \in D'$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

אינטגרלים משולשים

יהי תחום $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על V כאובייקט תלת מימדי, ועל f כצפיפות בכל נקודה, והאינטגרל $\iiint_V f dx dy dz$ מייצג את המסה של האובייקט.

בנוסף, $\iiint_V 1 dx dy dz$ הוא הנפח של התחום V .

חישוב אינטגרלים משולשים

אם

$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

וכן

$$V = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

אזי

$$\iiint_V f dx dy dz = \iint_D \left(\int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

שינוי קואורדינטות

$$x = x(u, v, w)$$

$$y = y(u, v, w)$$

$$z = z(u, v, w)$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} \right|$$

$$(x, y, z) \in V \quad (u, v, w) \in V'$$

אזי

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw$$

קואורדינטות גליליות

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$z = z$$

$$(x, y, z) \in V \quad (r, \theta, z) \in V'$$

$$|J| = r$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \cdot r dr d\theta dz$$

קואורדינטות כדוריות

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cos(\theta)$$

$$|J| = r^2 \sin(\theta)$$

$$(x, y, z) \in V \quad (r, \theta, \varphi) \in V'$$

$$\iiint_V f dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta)) \cdot r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$

אינטגרלים קווים מסוג ראשון במישור

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על C בתור שפה על הרצפה, ועל f כגובה הקירות, ואז האינטגרל $\int_C f dr$ מייצג את שטח הקירות.

כמו כן, אפשר לחשוב על C בתור חבל על הרצפה, ועל f כצפיפות החבל בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של החבל.

בנוסף, $\int_C 1 dr$ הוא אורך המסילה.

חישוב אינטגרלים קווים מסוג ראשון במישור

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה C

$$\vec{r} = (x(t), y(t))$$

$$t \in [a, b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

אינטגרלים קווים מסוג ראשון במרחב

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על C בתור חבל במרחב ועל f בתור הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל $\int_C f dr$ מייצג את המסה של החבל.

בנוסף, האינטגרל $\int_C 1 dr$ הוא האורך של המסילה.

חישוב אינטגרלים קווים מסוג ראשון במרחב

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$$

$$t \in [a, b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

אינטגרלים קוויים מסוג שני במישור

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

אפשר לחשוב על C בתור מסלול על הרצפה, ועל $\vec{F}$ בתור שקול הכוחות בכל נקודה, ואז $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ מייצג את העבודה שנעשית על חלקיק שנע לאורך המסלול.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג שני במישור

תהי פרמטריזציה של C

$$\vec{r} = (x(t), y(t))$$

$$t \in [a, b]$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt$$

אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

אפשר לחשוב על C בתור מסלול במרחב, ועל $\vec{F}$ בתור שקול הכוחות בכל נקודה, אז האינטגרל $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ מייצג את העבודה הנעשית על חלקיק שנע לאורך המסלול.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב

תהי פרמטריזציה של המסילה

$$\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$$

$$t \in [a, b]$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

סימון נוסף לאינטגרלים קוויים מסוג שני

$$\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$$

והפרמטריזציה של המסילה היא

$$\vec{r} = (x(t), y(t))$$

אזי נסמן

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy$$

כאשר

$$\int_C P dx = \int_a^b P(\vec{r}(t)) \cdot x'(t) dt$$

$$\int_C Q dy = \int_a^b Q(\vec{r}(t)) \cdot y'(t) dt$$

משפט גרין

יהי תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ בעל השפה C ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ בעל נגזרות רציפות. אזי האינטגרל הקווי מסוג שני של $\vec{F}$ מסביב ל- C נגד כיוון השעון שווה לאינטגרל הכפול של $\text{curl}(\vec{F})$ על התחום D .

נסמן

$$\vec{F} = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$$

אזי

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \text{curl}(\vec{F}) dx dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ אפשר לחשוב על M כאובייקט משטחי ועל f כפונקציית הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל $\iint_M f dS$ מייצג את המסה של האובייקט. בנוסף, $\iint_M 1 dS$ מייצג את שטח הפנים של המשטח.

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$(u, v) \in D$$

אזי

$$\iint_M f dS = \iint_D f(\vec{s}(u, v)) \cdot |\vec{s}_u \times \vec{s}_v| du dv$$

אינטגרלים משטחיים מסוג שני

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ויהי כיוון לנורמל למשטח. אפשר לחשוב על המשטח בתור ממברנה ועל השדה הוקטורי בתור עוצמת הזרימה, אז האינטגרל $\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ הוא סך כל הזרימה דרך הממברנה בכיוון הנורמל הנתון.

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג שני

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$(u, v) \in D$$

אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \pm \iint_D \vec{F}(\vec{s}(u, v)) \cdot (\vec{s}_u \times \vec{s}_v) du dv$$

כאשר הסימן נקבע על ידי בחירת וקטור הנורמל $\vec{s}_u \times \vec{s}_v$ בכיוון הנתון.

משפט גאוס (דיברגנץ)

יהי גוף תלת מימדי $V \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל משטח מעטפת M ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות $\vec{F}$, ונביט בנורמל כלפי חוץ הגוף, אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \text{div}(\vec{F}) dx dy dz = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz$$

משפט סטוקס

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל שפה C ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות $\vec{F}$, אזי האינטגרל הקווי נגד כיוון השעון כאשר הלמעלה הוא לפי הנורמל למשטח מקיים:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_M \text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} dS = \iint_M \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$