<u>פתרון תרגיל מספר 5</u>

1. יש לחשב את האינטגרל $\int_\gamma \left(z+\frac{1}{z}\right)dz$ כאשר $\gamma(t)=\sin 2t+i(4\cos t+2t),\ 0\le t\le \pi/2$.

לפונקציה $f(z)=z+\frac{1}{z}$ יש פונקציה קדומה בתחום $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ הנתונה כ- $g(z)=\frac{1}{2}z^2+\log z$ כאשר $\log$ הוא הענף העיקרי של הלוגריתם. קל לבדוק שהמסילה γ נמצאת בתוך התחום $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ ולכן נקבל ש-

$$\int_\gamma \left(z+\frac{1}{z}\right)dz=\frac{1}{2}z^2+\log z\Big|_{4i}^{\pi i}=\left[\frac{-\pi^2}{2}+\log \pi i\right]-\left[-\frac{16}{2}+\log 4i\right]$$

$$=\left[\frac{-\pi^2}{2}+\left(\ln\pi+i\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left[-8+\left(\ln 4+i\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{-\pi^2}{2}+8+\ln\pi-\ln 4.$$

2. א. יש לחשב את האינטגרל $\int_\gamma \frac{1}{z-\alpha}dz$ כאשר המסילה γ היא המעגל $|z-\alpha|=r$. γ נתונה בצורה פרמטרית כ- $\gamma(t)=\alpha+re^{it},0\le t\le 2\pi$. לכן מהגדרת האינטגרל נקבל ש-

$$\int_\gamma \frac{1}{z-\alpha}dz=\int_0^{2\pi}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-\alpha}dt=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{it}}{re^{it}}dt=\int_0^{2\pi}idt=2\pi i.$$

ב. יש לחשב את האינטגרל $\int_\gamma \frac{(z+1)^7}{z-1}dz$ על המעגל $|z-1|=1$:

$$\int_\gamma \frac{(z+1)^7}{z-1}dz=\int_\gamma \frac{(z-1+2)^7}{z-1}dz=\sum_{n=0}^{7}\binom{7}{n}\int_\gamma \frac{(z-1)^n 2^{7-n}}{z-1}dz=\int_\gamma \frac{2^7}{z-1}dz+\sum_{n=1}^{7}\binom{7}{n}\int_\gamma \frac{(z-1)^n 2^{7-n}}{z-1}dz$$

לפי סעיף א האינטגרל הראשון שווה ל- $2^7\cdot 2\pi i=2^8\pi i$ והאינטגרל השני הוא אינטגרל של פונקציה שלמה על עקומה סגורה. לכן האינטגרל כולו שווה ל- $2^8\pi i$.

3. יש לחשב את האינטגרל $\int_\gamma \frac{1}{(z-1)(z+1)}dz$ כאשר γ נתונה לפי $\gamma(t)=it,-1\le t\le 1$:.

ראשית נפרק את הביטוי $\frac{1}{(z-1)(z+1)}$ לשברים חלקיים $\frac{1}{(z-1)(z+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)$.

$\int_\gamma \frac{1}{(z-1)(z+1)}dz = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{(z-1)}dz - \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{(z+1)}dz$. לפונקציה $f(z)=\frac{1}{z-1}$ יש פונקציה קדומה בתחום $\mathbb{C}\setminus\Omega$ כאשר $\Omega=\{it:-1\le t\le 1\}$ הנתונה לפי $F(z)=\log_R(z-1)$ כאשר $\log_R$ הוא הענף של הלוגריתם המתאים לרצועה $0<\operatorname{Im} z<2\pi$. לפונקציה $f(z)=\frac{1}{z+1}$ יש פונקציה קדומה בתחום $\mathbb{C}\setminus\Omega$ הנתונה לפי $F(z)=\log(z+1)$ כאשר $\log$ הוא הענף העיקרי של הלוגריתם. לכן

$$\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{(z-1)}dz - \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{(z+1)}dz = \frac{1}{2}\log_R(z-1)\Big|_{-i}^{i} - \frac{1}{2}\log(z+1)\Big|_{-i}^{i}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\log_R(i-1)-\log_R(-i-1)\right) - \frac{1}{2}\left(\log(i+1)-\log(-i+1)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln|i-1|+i\arg_R(i-1)-\ln|-i-1|-i\arg_R(-i-1)\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\ln|i+1|+i\arg(i+1)-\ln|-i+1|-i\arg(-i+1)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi i}{4}-\frac{5\pi i}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi i}{4}+\frac{\pi i}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

4. נחשב את האינטגרל של $f(z)=\operatorname{Re} z$ על המסילה $\gamma(t)=e^{it}, -\pi\le t\le\pi$:

$$\int_\gamma \operatorname{Re} z dz = \int_{-\pi}^{\pi}\cos t\gamma'(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi}\cos t(-\sin t + i\cos t)dt = -\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\sin t dt + i\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t dt$$
$$-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2t dt + i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}+\frac{\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{4}\cos 2t\Big|_{-\pi}^{\pi} + i\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = i\pi$$

כיוון שהאינטגרל הוא על עקומה סגורה ושונה מאפס נובע ש- $f(z)=\operatorname{Re} z$ איננה שלמה.

5. כיוון ש- u הרמונית נובע ש- $f(z)=u_x(z)-iu_y(z)$ אנליטית. לכן האינטגרל של f על העקומה $\gamma(t)=e^{it}, -\pi\le t\le\pi$ שווה לאפס. לכן

$$0=\int_\gamma f(z)dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(u_x(\gamma(t))-iu_y(\gamma(t))\right)\gamma'(t)dt$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left(u_x(e^{it})-iu_y(e^{it})\right)ie^{it}dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(u_x(e^{it})-iu_y(e^{it})\right)(-\sin t+i\cos t)dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} -u_x(e^{it})\sin t + u_y(e^{it})\cos t dt + i\int_{-\pi}^{\pi} u_x(e^{it})\cos t + u_y(e^{it})\sin t dt$$

בפרט נקבל שהחלקים הממשיים והמדומים שווים לאפס ולכן $\int_{-\pi}^{\pi} u_x(e^{it})\cos t + u_y(e^{it})\sin t dt = 0$.