פתרון תרגיל בית מספר 7

<u>שאלה 5.10</u>

א. $tr(A^t)=\sum_{i=1}^{n}\left(a^t\right)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=tr(A)$.

ב. תהי $C=A+B$ אזי $tr(C)=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=tr(A)+tr(B)$

ג. תהי $\alpha\in F$ ותהי $M=\alpha A$. נקבל: $tr(M)=\sum_{i=1}^{n}m_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\alpha a_{ii}=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\alpha tr(A)$.

<u>שאלה 2.1</u>

W הוא תת מרחב של V ולכן לפי התנאי המקוצר לתת מרחב ידוע ש- $0_V\in W$. אך גם $0_W\in W$ ובגלל שהאיבר הנייטרלי הוא יחיד, מקבלים $0_V=0_W$.

<u>שאלה 2.9</u>

זו שאלה קלה וכל הסעיפים די חוזרים על עצמם, לכן נעשה את סעיף א' בלבד:

נסמן את המטריצות הסימטריות ב- U. אנו יודעים כי אם $A\in U$, אזי A מקיימת: $A=A^t$. מטריצות אלה חייבות להיות ריבועיות, לכן $U\subset V$. כעת, לפי הקריטריון המקוצר:

1. $0\in U$ כי מטריצת האפס היא מטריצה סימטרית.
2. יהיו $A,B\in U$, $\alpha\in F$. אזי: $A+\alpha B=A^t+\alpha B^t=A^t+(\alpha B)^t=(A+\alpha B)^t$ $\Leftarrow$ $A+\alpha B\in U$. מש"ל.

<u>שאלה 2.11</u>

א. נוכיח עבור $U\times\{0_V\}$ לפי הקריטריון המקוצר לתת מרחב.
איבר נייטרלי: היות ו- U הוא תת מרחב בעצמו מתקיים $0_U\in U$ ולכן האיבר הנייטרלי בתת מרחב זה הוא $(0_U,0_V)$.
חיבור: יהיו $(u_1,0_V),(u_2,0_V)\in U\times\{0_V\}$.
מתקיים $(u_1,0_V)+(u_2,0_V)=(u_1+u_2,0_V+0_V)=(u_1+u_2,0_V)$. היות ו- U הוא תת מרחב בעצמו, $u_1+u_2\in U$ ולכן $(u_1+u_2,0_V)\in U\times\{0_V\}$.
כפל בסקלר: כנ"ל.

ב. בדיקת כל התכונות כמו בסעיף א'.

דרך פשוטה יותר: שימו לב כי $U\times\{0_V\}$ הוא למעשה מכפלה של שני מרחבים ווקטוריים. מכך נובע באופן מיידי כי הוא מרחב ווקטורי בעצמו (מדוע?).

שאלה 3.2

יהיו U,W תתי מרחבים של מרחב ווקטורי V. נניח בשלילה כי $U\bigcup W$ הינו תת מרחב באשר $U\not\subset W, W\not\subset U$.

נבחר $w\in W\setminus U,\ u\in U\setminus W$. היות ולפי הנחתנו $U\bigcup W$ הוא מ"ו, הוא סגור לסכום ולכן מתקיים $u+w\in U\bigcup W$. בפרט $u+w\in U$ **או** $u+w\in W$. נבחר אחד מהם ונגיע לסתירה: נניח $u+w\in W$. מכיוון ש $w\in W$ ו- W תת מרחב הרי ש $-w\in W$ ומכאן $u=(u+w)+(-w)\in W$ בסתירה לאופן בו בחרנו את u. מסקנה: $U\bigcup W$ אינו מרחב וקטורי.

שאלה 4.3

נתבונן במרחב וקטורי $\mathbb{Z}_2^2$ ובתתי מרחבים הבאים:

א.

$$U:=\{(0,0),(1,1)\},V:=\{(0,0),(0,1)\},W:=\{(0,0),(1,0)\}$$
$$V+W=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$
$$U\cap(V+W)=U$$
$$\{(0,0)\}=U\cap V+U\cap W\neq U$$

ב,ג דומה מאוד.

או למשל:

א. $U=\{(1,1)\},V=\{(0,1)\},W=\{(1,0)\}$. אזי:

$U=U\cap(V+W)\neq U\cap V+U\cap W=\{(0,0)\}$.

ב. אם $U=V=W$ אז מתקיים שוויון.

ג. אותה דוגמא כמו ב-א'.

שאלה 4.8

א. $U_1,V_1=\{0\}\subseteq\mathbb{R}^n$

ב. $U_2=Span\{e_2,e_4,...,e_{2i}\},\ i=1...\frac{n}{2}$

$V_2=Span\{e_1,e_3,...,e_{2i-1}\}$

(כאשר e_k זהו ווקטור בסיס סטנדרטי).

דוגמא נוספת - $U_2=\mathbb{R}^n,V_2=\{0\}$.

תרגילים לא מהחוברת

<u>תרגיל 1</u>

יהיו x,y שני ווקטורים, ויהיו α,β סקלרים. הוכיחו:

א. $\alpha x=0$ אם ורק אם $\alpha=0$ או $x=0$.

ב. $\alpha x+\beta y=\beta x+\alpha y$ אם ורק אם $\alpha=\beta$ או $x=y$.

<u>פתרון:</u>

א. הכיוון $\Rightarrow$: אם $\alpha=0$ אזי מתכונות מרחב וקטורי ותכונות שדה נקבל ש: $\alpha x=0x=(0+0)x=0x+0x$. כעת, קיבלנו ש $0x=0x+0x$. מכיון שבמ"ו לכל איבר קיים נגדי אז קיים $-(0x)$. נקבל מהמשוואה הקודמת $0x+(-(0x))=\left(0x+0x\right)+(-(0x))$. מהגדרת $-(0x)$ ובשימוש בתכונת הקיבוץ נקבל ש $0=0x$. כלומר $\alpha x=0$.

אם $x=0$ אז מתכונות מ"ו נקבל ש $\alpha x=\alpha 0=\alpha\left(0+0\right)=\alpha 0+\alpha 0$. קיבלנו ש $\alpha 0=\alpha 0+\alpha 0$. באופן דומה למקרה הקודם ניתן להסיק ש $\alpha 0=0$.

הכיוון $\Leftarrow$: נתון $\alpha x=0$. אם $\alpha=0$ סיימנו. אחרת, $\alpha\neq 0$ ולכן קיים הופכי α^{-1}. נכפיל בהופכי זה את שני האגפים ונקבל: $\alpha^{-1}\left(\alpha x\right)=\alpha^{-1}\cdot 0$. כעת, מחד $\alpha^{-1}\cdot 0=0$ עפ"י הכיוון $\Rightarrow$ שהוכחנו. מאידך $\alpha^{-1}\left(\alpha x\right)=\left(\alpha^{-1}\alpha\right)x=1x=x$ ולכן בסה"כ $x=0$.

ב. בשימוש תכונות מ"ו נקבל ש

$$\alpha x+\beta y=\beta x+\alpha y\Leftrightarrow \alpha x-\beta x-\alpha y+\beta y=0\Leftrightarrow\left(\alpha-\beta\right)(x-y)=0$$

מסעיף א נקבל ש $\left(\alpha-\beta\right)(x-y)=0$ אם ורק אם $\alpha=\beta$ או $x=y$.

<u>תרגיל 2</u>

א. יהיו V מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{C}$. נגדיר פעולת כפל חדשה של ווקטור בסקלר מרוכב על ידי: $\alpha\circ x=\overline{\alpha}x$. הוכיחו ש- V ביחס לפעולת הכפל החדשה $\circ$ וביחס לפעולת החיבור המקורית + הוא מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{C}$.

ב. נגדיר $\mathbb{C}^n=\left\{\left(a_1,...,a_n\right):\ a_i\in\mathbb{C}\right\}$. עבור סקלר $b\in\mathbb{C}$ מגדירים את הכפל הבא: $b\circ\left(a_1,...,a_n\right)=\left(b\overline{a}_1,...,b\overline{a}_n\right)$. האם $\mathbb{C}^n$ הוא מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{C}$ עבור הפעולות $\circ,+$?

<u>פתרון:</u>

א. כמובן, אין צורך להוכיח שפעולת החיבור מקיימת את האקסיומות הדרושות. נוכיח עבור הכפל.

1. מוגדרות: לכל $x \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{C}$ מתקיים $\alpha \circ x = \bar{\alpha} x \in \mathbb{C}$.
2. קיבוץ: לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ולכל $x \in V$ מתקיים:

$$\left(\alpha \cdot \beta\right) \circ x = \overline{\left(\alpha \cdot \beta\right)}\, x = \left(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}\right) x = \bar{\alpha}\left(\bar{\beta} x\right) = \bar{\alpha} \circ \left(\bar{\beta} x\right) = \bar{\alpha} \circ \left(\bar{\beta} \circ x\right)$$

3. כפל יחידה: לכל $x \in V$ מתקיים $1 \circ x = \bar{1} x = 1x = x$
4. פילוג:
   א. לכל $\alpha \in \mathbb{C}$ ולכל $x, y \in V$ מתקיים:

$$\alpha \circ \left(x + y\right) = \bar{\alpha}\left(x + y\right) = \bar{\alpha} x + \bar{\alpha} y = \alpha \circ x + \alpha \circ y$$

   ב. לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ולכל $x \in V$ מתקיים:

$$\left(\alpha + \beta\right) \circ x = \overline{\left(\alpha + \beta\right)} x = \left(\bar{\alpha} + \bar{\beta}\right) x = \bar{\alpha} x + \bar{\beta} x = \alpha \circ x + \beta \circ x$$

ב. $\mathbb{C}^n$ הוא לא מרחב ווקטורי ביחס לפעולות אלה, שכן, הכפל החדש אינו מקיים את האקסיומות הדרושות. למשל: $1 \circ \left(i, 0, 0, \ldots, 0\right) = \left(1 \cdot \bar{i}, 0, \ldots, 0\right) = \left(-i, 0, \ldots, 0\right) \neq \left(i, 0, 0, \ldots, 0\right)$