הגדרה

עבור $a \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$, סדרה חשבונית דו צדדית היא קבוצה $S = a+d\mathbb{Z} = \{a + dk | k \in \mathbb{Z}\}$.
נגדיר את הטופולוגיה הפרו־סופית τ_{pro} באופן הבא:
$O \in \tau_{\text{pro}} \Leftrightarrow$ לכל $x \in O$ קיימת $S \in x + d\mathbb{Z}$ כך ש$x \in x + d\mathbb{Z} \subseteq O$.

הערה

ניתן להגדיר בצורה שקולה באופן הבא:
$O \in \tau_{\text{pro}} \Leftrightarrow$ לכל $x \in O$ קיימת $x \in S = a + d\mathbb{Z} \subseteq O$.
הסיבה שההגדרות שקולות: אם $x \in a + d\mathbb{Z}$ אזי קיים $t \in \mathbb{Z}$ כך ש$x = a + dt \Leftarrow$ $a = x - dt$. נקבל:

$$a + d\mathbb{Z} = (x - dt) + d\mathbb{Z} = x + d\mathbb{Z}$$

טענה 1

τ_{pro} טופולוגיה על $\mathbb{Z}$.

הוכחה

1. $\mathbb{Z} \in \tau_{\text{pro}}$ כי לכל $x \in \mathbb{Z}$ מתקיים $x \in x + 1 \cdot \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. $\emptyset \in \tau_{\text{pro}}$ באופן ריק.
2. נניח $\forall_{i \in I} O_i \in \tau_{\text{pro}}$, צ"ל $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau_{\text{pro}}$.
יהי $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$, אזי קיים i_0 כך ש$x \in O_{i_0}$. $x \in O_{i_0} \in \tau_{\text{pro}}$ ולכן נקבל שקיימת $x \in S = x + d\mathbb{Z} \subseteq O_{i_0}$. $O_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$ ולכן $x \in S \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i \Leftarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in I_{\text{pro}}$.
3. נניח $O_1, O_2 \in \tau_{\text{pro}}$, ונוכיח $O_1 \cap O_2 \in \tau_{\text{pro}}$.
יהי $x \in O_1 \cap O_2$, אזי $x \in O_1 \in \tau_{\text{pro}}$ ולכן קיימת $x \in S_1 = x + d_1\mathbb{Z} \subseteq O_1$.
באופן דומה קיימת $S_2 = x + Z_2\mathbb{Z}$ כך ש$x \in S_2 = x + d_2\mathbb{Z} \subseteq O_2$.
תהי $S_3 = x + d_1 d_2 \mathbb{Z}$. נראה ש$S_3 \subseteq S_1 \cap S_2$:
יהי $t = x + d_1 d_2 k \in S_3$ $(\mathbb{Z} \ni k)$. $t = x + d_1 (d_2 k) \in S_1$. באופן דומה מראים ש$t \in S_2$. נקבל $x \in S_3 \subseteq S_1 \cap S_2 \subseteq O_1 \cap O_2$, לכן $O_1 \cap O_2 \in \tau_{\text{pro}}$

טענה 2

$a + d\mathbb{Z}$ סגוחה[1] לכל a, d

[1] סגוחה=סגורה ופתוחה

הוכחה

$a+d\mathbb{Z}$ פתוחה כי לכל $x\in a+d\mathbb{Z}$ מתקיים $x\in x+d\mathbb{Z}+a+d\mathbb{Z}\subseteq a+d\mathbb{Z}$, לכן $a+d\mathbb{Z}\in\tau_{\text{pro}}$.

נוכיח ש$a+d\mathbb{Z}$ סגורה. נראה ש$(a+d\mathbb{Z})^c$ פתוחה.

תזכורת: ניתן להגדיר יחס שקילות מעל $\mathbb{Z}$: $a\sim b\Leftrightarrow a\equiv b \pmod d$.

קיים $0\le k\le d-1$ כך ש$a\equiv k \pmod d$. מתקיים

$$(a+d\mathbb{Z})^c=\biguplus_{b\in\{1,2,\dots d-1\}}(b+d\mathbb{Z})$$

נקבל ש$(a+d\mathbb{Z})^c$ פתוחה כאיחוד פתוחות. לכן $a+d\mathbb{Z}$ סגוחה.

כעת נוכל להוכיח בש"ב שקיימים אינסוף ראשוניים.

הגדרה(התכנסות במרחב טופולוגי)

יהי (X,τ) מ"ט. נאמר שהסדרה $\{x_n\}\subseteq X$ מתכנסת ל$x\in X$ אם לכל U סביבה של x($x\in U\in t$) קיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$, $x_n\in U$.

הגדרה(טופולוגיית קו־מניה)

תהי X קבוצה. נגדיר את הטופולוגיה

$$\tau_{\text{co}-\aleph_0}=\{O\subseteq X|O=\emptyset\vee|O|^c\le\aleph_0\}$$

$(X,\tau_{\text{co}-\aleph_0})$ אכן מרחב טופולוגי

נאפיין את הסדרות המתכנסות במרחב.

תהי $X\supseteq\{x_n\}\to x\in X$. תהי $U=\left(X\setminus\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)\cup\{x\}$.

U סדרה של X שכן $x\in U$ וגם $u\in\tau$($|U^c|\le\aleph_0$).

$x_n\to x$ וגם U סביבה של x ולכן מהגדרת התכנסות, קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$

$$x_n\in U=\left(X\setminus\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)\cup\{x\}$$

לכן בהכרח $\forall_{n\ge n_0}x_n=x$. כלומר $\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

בכל מ"ט סדרה הקבועה לבסוף(כלומר $\forall_{n\ge n_0}x_n=x$) מקיימת $x_n\to x$(בדקו!)

סיכום ביניים: סדרה מתכנסת ב$(x,\tau_{\text{co}-\aleph_0})$ $\Leftrightarrow$ היא קבועה לבסוף.

תרגיל המשך

תהי X קבוצה כך ש$|x| > \aleph_0$. נתבונן ב$(X, \tau_{\text{co}-\aleph_0})$

1. האם הוא מושרה ע"י המטריקה הדיסקרטית?
2. האם הוא מטריזבילי?

פתרון

1. יהי $x \in X$.
$\{x\} \in \tau_{\text{disc}}$. מתקיים $|\{x\}^c| = |X \setminus \{x\}| > \aleph_0$. מכאן $\{x\} \notin \tau_{\text{co}-\aleph_0}$.
2. נראה ש$(X, \tau_{\text{co}-\aleph_0})$ אינו מטריזבילי. נניח בשלילה שהמרחב הנ"ל מטריזבילי. אזי קיימת מטריקה d המשרה אותו. הוכחנו בעבר, שסדרה מתכנסת במ"מ דיסקרטי $\Leftrightarrow$ היא קבועה לבסוף. הוכחנו קודם שסדרה מתכנסת ב$(X, \tau_{\text{co}-\aleph_0})\Leftrightarrow$היא קבועה לבסוף.

   המטריקה הדיסקרטית d_{disc} משרה טופולוגיה דיסקרטית. נקבל

$$\underbrace{x_n = x}_{\text{at the end}} \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\tau_{\text{co}-\aleph_0}} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d} x$$

$$x_n \xrightarrow{\tau_{\text{disc}}} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_{\text{disc}}} x \Leftrightarrow x_n = x$$

   נקבל שהמטריקות d, d_{disc} שקולות(התכנסות זהה). מטריקות שקולות מגדירותו אותו אוסף של קבוצות פתוחות(=טופולוגיה), לכן $\tau_{\text{co}-\aleph_0} = \tau_{\text{disc}}$ בסתירה ל1.

נוכיח בדרך אחרת ש$(X, \tau_{\text{co}-\aleph_0})$ אינו מטריזבילי(כאשר $|x| > \aleph_0$)

טענה(ללא הוכחה)

יהיו $\tau \subseteq \sigma$ טופולוגיות על X.
אם $x_n \xrightarrow{\tau} x$ אזי $x_n \xrightarrow{\sigma} x$.

הגדרה(הישר של סורגנפריי)

נסמן ב$\mathbb{R}_l$ את המספרים הממשיים עם הטופולוגיה τ הבאה: קבוצה היא פתוחה אם היא איחוד כלשהו(כולל איחוד ריק) של קטעים מהצורה $[a, b)$

הערה

בש"ב נוכיח שזוהי טופולוגיה על $\mathbb{R}$ המכילה את הטופולוגיה הסטנדרטית על $\mathbb{R}$.

תרגיל

הוכיחו שהסדרה $\left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ לא מתכנסת בישר של סורגנפריי.

פתרון

נניח בשלילה ש-$-\frac{1}{n}$ מתכנס ל-$x \in \mathbb{R}$(לפי סורגנפריי). לפי ההערה והטענה נקבל ש-$-\frac{1}{n}$ מתכנס ל-x(לפי הטופולוגיה הסטנדרטית). ידוע ש-$-\frac{1}{n}$ מתכנס ל-0(ורק לאפס). לכן $x_n \to 0$ לפי סורגנפריי.

$[0,1)$ סביבה של 0(בסורגנפריי), אבל $\forall_n -\frac{1}{n} \notin [0,1)$ בסתירה להגדרת התכנסות.

הגדרה

יהיו X, Y מ"ט, $f : X \to Y$ פונקציה.

נאמר ש-f רציפה ב-$a \in X$ אם לכל U סביבה של $f(a)$ קיימת סביבה V של a כך ש-$f(V) \subseteq U$.

תרגיל

על $X = \{a, b\}$ ו-$Y = \{a, b, c\}$ נגדיר שתי טופולוגיות:

$$\tau_X = \{\emptyset, x\} \qquad \tau_Y = \{\emptyset, Y, \{c\}\}$$

תהי $f : X \to Y$ מוגדרת ע"י $\begin{matrix} f(a) = c \\ f(b) = a \end{matrix}$. הוכיחו כי f רציפה ב-b ולא רציפה ב-a.

פתרון

- <u>רציפות ב-b</u>: $f(b) = a$. הסביבה <u>היחידה</u> של a(ב-τ_Y) היא Y. ניקח X בתפקיד סביבה של b(τ_X) ונקבל $f(X) \subseteq Y$.
- <u>אי רציפות ב-a</u>: $f(a) = c$. ניקח את הסביבה של c(ב-τ_Y) שהיא $\{c\}$. הסביבה היחידה של a ב-τ_X היא X. מתקיים $f(X) = \{a, c\} \nsubseteq \{c\}$ ולכן f לא רציפה ב-a.

משפט(רציפות גלובלית)

יהיו X, Y מ"ט. $f : X \to Y$ <u>רציפה</u>(כלומר רציפה בכל נקודה) אם ורק אם מתקיים אחד מהתנאים השקולים הבאים:

1. $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X לכל U פתוחה ב-Y.
2. $f^{-1}(U)$ סגורה ב-X לכל U סגורה ב-Y.

משפט

1. יהיו X, Y מ"ט ויהי $\{U_i\}$ כיסוי פתוח של X. תהי $f_i : U_i \to Y$ רציפה לכל $i \in I$, ונניח שלכל $x \in X$ אם $x \in U_i \cap U_j$ אזי $f_i(x) = f_j(x)$. אזי הפונקציה $F : X \to Y$ המוגדרת ע"י האוסף $\{f_i\}$ רציפה(כלומר $F(x) = f_i(x)$ כאשר $x \in U_i$)

2. קיים משפט דומה עבור כיסוי <u>סופי</u> ע"י קבוצות סגורות.

דוגמה

נתבונן בפונקציה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x & x\in[0,1]\\ 2-x & x\in[1,2] \end{cases}$$

פונקציה זו רציפה(משפט, סעיף 2)