זהויות טריגונומטריות:

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
$\sin(90-\alpha)=\cos\alpha$
$\cos(90-\alpha)=\sin\alpha$
$\tan(90-\alpha)=\cot\alpha$
$\cot(90-\alpha)=\tan\alpha$
$\sin(180-\alpha)=\sin\alpha$
$\cos(180-\alpha)=-\cos\alpha$
$\tan(180-\alpha)=-\tan\alpha$
$\tan\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha$
$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
$1+\tan^2\alpha=1/\cos^2\alpha$
$1+\cot^2\alpha=1/\sin^2\alpha$
$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$
$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$

$\tan(2\alpha)=2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$
$\sin(3\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$
$\cos(3\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$
$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin(a/2-\beta/2)\cos(a/2+\beta/2)$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$
$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin(a/2+\beta/2)\sin(a/2-\beta/2)$
$\sin\alpha\cos\beta=1/2\left(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$
$\sin\alpha\sin\beta=1/2\left(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$
$\cos\alpha\cos\beta=1/2\left(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha+\beta)=(\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$
$\tan(\alpha-\beta)=(\tan\alpha-\tan\beta)/(1+\tan\alpha\tan\beta)$
$\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha-\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha\tan\beta$
$\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\pi/2$
$\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}$
$\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

נוסחאות בחזקה שלישית

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$
$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

נגזרות מיידיות:

$\left(\frac{1}{\tan x}\right)'=\frac{-1}{(\tan^2x)(\cos^2x)}$
$(\cos ax)^n{}'=-n(\cos ax)^{n-1}\sin(x)*a$
$(\sin ax)^n{}'=n(\sin ax)^{n-1}\cos(x)*a$

$\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos' x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$arc\cot'(x)=\frac{-1}{1+x^2}$
$\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2x}$
$\cot'(x)=\frac{-1}{\sin^2x}$

$(e^x)'=e^x$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
$(a^x)'=a^x\ln a$
$(\log_a^x)'=\frac{1}{x\ln a}$

אינטגרלים מיידיים

$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+c$
$\int\ln xdx=x\ln x-x+c$
$\int\sin x=-\cos x+c$
$\int\frac{1}{\cos^2x}=\tan x+c$
$\int\frac{1}{\sin^2x}=-\cot x+c$
$\int\tan xdx=-\ln(\cos x)+c$
$\int\cot xdx=\ln(\sin x)+c$
$\int a^xdx=\frac{a^x}{\ln a}+c$
$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$

$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$
$\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)+c$
$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$
$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+c$
$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln(x-a)+C$
$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\cdot\frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n}+C$
$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}=\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$

נפחים/אורכים –

אורך קו-

$L_{AB}=\int_{X_A}^{X_B}\sqrt{1+(y')^2}dx$ | $L_{AB}=\int_{Y_A}^{Y_B}\sqrt{1+(x')^2}dy$ | $L_{AB}=\int_{\theta_A}^{\theta_B}\sqrt{r^2+(r')^2}d\theta$

נפח-

$V_x=\pi\int_{X_1}^{X_2}f^2(x)dx$ | $V_y=2\pi\int_{X_1}^{X_2}xf(x)dx$

חישוב של ln(cosx) ע"י טיילור חזקה 6 (T6)–
1. לוקחים את האיברים של פיתוח cos עד חזקה 6 (כי האיבר הראשון של ln הוא בחזקה 1 1*6=6).
2. לוקחים את האיברים של פיתוח ln עד חזקה 3 כי האיבר הראשון של cos הוא בחזקת 2. 2*3=6.

טור טיילור

$R_{(n)}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x)^{n+1}$ 0<c<x

$f_{(x)}=f_{(x_0)}+\frac{f'_{(x_0)}\cdot(x-x_0)}{1!}+\frac{f''_{(x_0)}\cdot(x-x_0)^2}{2!}...+\frac{f^{(n)}_{(x_0)}\cdot(x-x_0)^n}{n!}+o(x^n)$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$ **או** $R_{(n)}=\frac{e^c\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})\quad OR\quad R_{(2n)}=\frac{f^{(2n+1)}_{(c)}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\quad OR\quad R_{(2n+1)}=\frac{f^{(2n+2)}_{(c)}}{(2n+2)!}x^{2n+2}$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+R_{(n)}=\frac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}(n+1)}x^{n+1}$

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

הערה: טור טיילור סביב 0 נקרא טור מקלורן.

אינטגרלים

אינטגרלים טריגונומטריים

אם יש - $\sqrt{a^2-x^2}$ אז נציב - $x=a\sin t$	אם SIN X אי זוגית אז COS X=T
אם יש - $\sqrt{x^2-a^2}$ אז נציב - $x=\frac{a}{\cos t}$	אם COS X אי זוגית אז SIN X=T
אם יש - $\sqrt{x^2+a^2}$ אז נציב - $x=a\tan t$	אם SIN ו COS זוגית אז TAN X=T

הצבה אוניברסלית לאינטגרלים טריגונומטרים

$t=\tan\frac{x}{2}$
$x=2\arctan t$
$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$
$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int udv=uv-\int vdu$$

$\int p(x)\sin xdx$	$\int p(x)\cos xdx$	$\int p(x)\arcsin xdx$
$\int p(x)e^xdx$	$\int p(x)\ln xdx$	$\int p(x)\arctan xdx$

כחול- V (להעביר אחרי ה d)
אדום – U

$\int\cos(x)e^x$
$\int\sin(x)e^x$

טריק לUDV מחזורי – עושים UDV עד שחוזרים לאינטגרל המקורי. מעבירים אותו צד ומחלקים ב 2... גאוני...

אינטגרלים רציונלים ($\frac{P(X)}{F(X)}$)

1. אם החזקה במונה גבוהה יותר מבמכנה אז עושים חילוק וארוך ומקבלים תוצאה עם שארית גבוהה יותר במכנה
2. מפרקים את המכנה לגורמים ועושים C,B,A...
3. אם יצא בסוף AX+B אז משלימים את המונה שיהיה שווה לנגזרת של המכנהף מפרידים לשני אינטגרלים ואז אחד הוא LN של המכנה ואת השני משלימים לנוסחה.

החלפה לינארית

$\int f(ax+b)dx=\int\frac{F(ax+b)}{a}dx$

דוגמא: $\int\frac{1}{\sqrt{3x-5}}dx=\int\frac{2(\sqrt{3x-5})}{3}dx$

גבולות –

חסומה*אפיסה=0

$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ | $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$ | $\lim_{x\to0}(\frac{e^x-1}{x})=1$
$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ | $\lim_{x\to0}(\frac{\sin x}{x})=1$ | $\lim_{x\to0}(\frac{\ln(1+x)}{x})=1$

לשאוף במצב של 1^∞

$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=1$

משפט הגבול

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n>N\left|An-A\right|<\varepsilon$

לא מוגדר – $\infty^\infty,\infty^0,0^\infty,1^\infty,0^0,\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0},\infty-\infty,\infty\cdot0$

מוגדר - $\frac{0}{\infty}=0,\infty+\infty,\infty\cdot\infty$

רציפות בפונקציות

אי רציפות בפונקציות:

1. **אי רציפות סליקה:**
   א. ערך הפונק' בנקודה שונה מערך הגבול של הפונק' בנקודה.
   ב. הפונק' לא מוגדרת בנקודה זו.
2. **אי רציפות מסוג ראשון:** לפונק' יש 2 גבולות חד צדדיים אך הם שונים זה מזה.
3. **אי רציפות מסוג שני:** לפחות אחד מהגבולות החד צדדיים לא קיים.

תכונות של פונקציות רציפות:

1. משפט ערך הביניים של קושי לגבי רציפות פונקציות:

מסקנה ממשפט ערך הביניים של קושי: אם פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ והיא מקבלת ערכים חיוביים ושליליים בקטע הזה, אז יש לה חיתוך עם ציר ה-x:

$f_{(a)}\cdot f_{(b)}<0 \Rightarrow f_{(c)}=0 \quad , c\in[a,b]$

הערה: כל פולינום מחזקה אי זוגית הוא בעל שורש ממשי אחד לפחות.

שימוש עיקרי – כשמבקשים להוכיח שלמשוואה יש פיתרון אחד ויחיד

משפט רול: אם פונק' רציפה וגזירה בקטע פתוח (a,b) ו- $f_{(a)}=f_{(b)}$ אז קיימת נק' בתחום שבה הנגזרת מתאפסת ($f'_{(c)}=0$).

הערה: בין 2 נקודות שבהן לפונקציה אותו ערך - תמיד תהיה נק' שבה הנגזרת מתאפסת.

משפט לגרנג' (משפט הערך הממוצע):

אם פונק' רציפה בקטע סגור $[a,b]$ וגזירה באותו קטע (אבל פתוח), אז בתוך הקטע קיימת נקודה אחת לפחות שמקיימת: $\frac{f_{(b)}-f_{(a)}}{b-a}=f'_{(c)}$,$c\in[a,b]$.

שימוש עיקרי – בהוכחות אי שיוויון מהצורה A<c<B

2. משפט ויירשטרס 1 לגבי רציפות פונקציות:

אם פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אז היא גם חסומה בקטע זה.

3. משפט ויירשטרס 2 לגבי רציפות פונקציות:

אם פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ אז היא מקבלת נק' קיצון בקטע זה.

גזירת פונקציות

הפונקציה גזירה בנק' x_0 אם קיים הגבול: $f'_{(x_0)}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f_{(x_0+\Delta x)}-f_{(x_0)}}{\Delta x}$

משוואת משיק:

$y=f_{(x_0)}+f'_{(x_0)}\cdot(x-x_0) \quad , df=f'_{(x_0)}\cdot(x-x_0)$

אם הפונק' גזירה בנק' אז היא גם רציפה בנק' זו (לא להפך).

הוכחת שורש אחד ויחיד לפונקציה:

מוצאים נקודה שבה הפונקציה חיובית, ונקודה שבה הפונקציה שלילית, ואז מוכיחים שהפונקציה מונוטונית יורדת / עולה ממש.

חקירת פונקציות

1. תמיד להכניס את הנקודות אי הגדרה לטבלב
2. אסימפטוטה אנכית – גבול משני הצדדים של נקודות אי הגדרה
3. אסימפטוטות משופעות. גבול ל+- אינסוף. y=ax+b

$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f_{(x)}}{x} \quad \rightarrow \quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f_{(x)}-ax)$

4. אם יש ערך מוחלט צריך לגזור שתי פונקציות שונות – פעם + פעם –
5. אם פונק' היא זוגית, חסכון חצי שאלה – לא צריך לחקור גם + וגם – (מספיק רק אחד). (sinx – פונק' אי זוגית, cosx – פונק' זוגית).

נוסחאות שימושיות

1. $|a+b|\le|a|+|b|$
   $|a\cdot b|\le|a|\cdot|b|$
2. $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$
3. $\frac{a_1+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\cdot...\cdot a_n} \quad , \quad a_1,...,a_n\ge0$
4. $|\sin a|\le|a| \quad |\sin b-\sin a|\le|b-a|$
5. $\sqrt[n]{Const}\xrightarrow{n\to\infty}1 \quad \sqrt[n]{n}\xrightarrow{n\to\infty}1$
6. $\cos(90-\alpha)<\alpha \quad \cos(\alpha)<\alpha-90$
7. $n!<n^n \ , \sin\alpha<\alpha \ , \ln x<x$
8. $\sqrt[n]{a^n+b^n}\to a \quad a>b$
9. **לופיטל:** במצב של $\frac{0}{0},\frac{\pm\infty}{\pm\infty},0\cdot\pm\infty$: $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

אם ע"י לופיטל לא מקבלים גבול הדבר אינו אומר שבאמת אין גבול, אלא צריך לנסות אחרת.

10. במצב של ∞^0 או 0^0 בלבד:

$\lim_{x\to0}x^x\Rightarrow y=x^x\Rightarrow\ln y=x\ln x\Rightarrow\lim_{x\to0}x\ln x=0\Rightarrow$

$\lim_{x\to0}\ln y=0\Rightarrow\ln(\lim_{x\to0}y)=\ln1\Rightarrow\lim_{x\to0}y=1\Rightarrow\lim_{x\to0}x^x=1$

או:

11. 1^∞ - a, b – כפונקציה של X: $\lim_{x\to0}a^b=e^{\lim_{x\to0}(a-1)\cdot b}$
12. $(a^{x^\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}\cdot a^{x^\alpha}\cdot\ln a$
13. $a=\lim a_n\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a)\cdot b_n+a\cdot\sum_{n=1}^{\infty}b_n$
14. $\ln a+\ln b=\ln(a\cdot b)$
15. $\ln(x)<x \quad , \quad \ln(x+1)<x$

סדרות

סדרה חשבונית:

$a_n=a_0+n\cdot d$

$S_n=(a_0+a_n)\cdot\frac{n+1}{2}$

סדרה הנדסית:

$a_n=a_0\cdot q^n$

$S_n=a_0\cdot(\frac{q^n-1}{q-1})$

הסדרה תמיד מתכנסת כאשר q<1.

אלגוריתם לפיתרון:

אם אין An במכנה אז פותרים לפי סד"פ:

1. מניחים שיש גבול (L) ומוצאים אותו.
2. מוכיחים חסימות באינדוקציה
3. מוכיחים מונוטוניות באינדוקציה
4. הסידרה חסומה מלעיל/מלרע ומונוטונית עולה/יורדת ולכן לפי משפט וורשטרס היא מתכנסת לגבול L

אם יש An במכנה אז פותרים לפי סד"פ:

1. מניחים שיש גבול (L) ומוצאים אותו.
2. מגדירים פונקציה זהה לנוסחת הנסיגה. בודקים אם היא עולה או יורדת עפ"י הנגזרת שלה ומוכיחים בעזרתה את חסימות הסידרה.
3. מוכיחים מונוטוניות הסידרה
4. משפט וורשטרס....

משפט הסנדוויץ':

אם $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n$ וגם ל- n מספיק גדול מתקיים $b_n\le a_n\le c_n$ אז יש $\lim_{n\to\infty}a_n$ ומתקיים - $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n$.

משפטי גבולות:

1. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אז $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|L|$.
2. אם $a_n>0$ לכל n, ואם $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אז $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{L}$.

אם $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$ ואם $a_n=f(n)$ אז קיים $\lim_{n\to\infty}a_n=L$.