

בחינה סופית בחשבון אינפיניטסימלי 2 מדמ"ח – 89-133

מועד א' תשע"ה

מרצה: ד"ר שמעון ברוקס, ד"ר יהודה שנפס

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: מחשבון

ענו על כל השאלות

1. חשב באמצעות אינטגרל את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ של כל אחת מהסדרות הבאות:

(א)

$$a_n = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \dots + \frac{2}{n+n}$$

(ב) לכל $k > 1$:

$$a_n = \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$$

2. חשב את האינטגרלים הלא-מסויימים הבאים:

(א)

$$\int x \sin(x^2) dx$$

(ב)

$$\int x^2 \sin(x) dx$$

(ג)

$$\int \sin(\ln(x)) dx$$

3.

(א) הוכח או הפרד: אם האינטגרל $\int_2^\infty f(x) dx$ מתכנס בהחלט, אזי גם האינטגרל $\int_2^\infty |f(x)|^2 dx$ מתכנס.

(ב) הוכח או הפרד: אם האינטגרל $\int_2^\infty f(x) dx$ מתכנס בתנאי, אזי גם האינטגרל $\int_2^\infty |f(x)|^2 dx$ מתכנס.

4.

(א) תהי $f_0(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0, a]$, ונגדיר באינדוקציה סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ בקטע $[0, a]$ על ידי

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$$

הוכח כי הסדרה מתכנסת במידה שווה לפונקציה $f(x) \equiv 0$ (הפונקציה השווה זהותית ל-0) על $[0, a]$.

(רמז: זכרו כי פונקציה רציפה על קטע סגור חסומה בו.)

(ב) תהי $f_0(x) \equiv 1$ (הפונקציה השווה 1 זהותית), ונגדיר באינדוקציה סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ בקטע $[0, 1]$ על ידי

$$f_n(x) = \sqrt{x f_{n-1}(x)}$$

הוכח שסדרה זו מתכנסת במידה שווה על הקטע $[0, 1]$.

5. יהיו המקיימים

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \infty$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n = 1$$

(א) מצא תחום התכנסות של טור החזקות

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

(ב) הוכח שקיימת נגזרת של f שאינה מתאפסת ב- 0 ; כלומר, הוכח שקיים $n > 0$ המקיים $f^{(n)}(0) \neq 0$.

(ג) הוכח שהגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x f'(x)} = L$$

קיים אם ורק אם $c_0 = 0$. מהם הערכים האפשריים לגבול L ?
(רמז: מהו טור החזקות המתכנס לפונקציה $x f'(x)$ בסביבה של $x = 0$?)

6. מצא את המינימום ומקסימום המוחלטים של הפונקציה

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x$$

בדיסק הסגור

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

בהצלחה רבה!