אינפי 4 – תרגול 9

אינטגרל משטחי על פונקציה

משפט: יהי משטח σ משטח שמשוואתו היא $z=g(x,y)$, ויהי R ההיטל של σ על מישור xy .
אם g היא פונקציה שיש לה נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון ב R ו $f(x,y,z)$ היא פונקציה רציפה ב σ, אז –

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{R} f\left(x,y,\mathrm{g}(x,y)\right)\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}dA$$

הערה: אם ניתן להציג את σ ע"י גרף של פונקציה מהצורה $x=g(y,z)$ או $y=g(x,z)$ אז נקבל נוסחה לחישוב האינטגרל על σ בצורה אנלוגית.

דוגמא: היריעה הדקה היא חלק הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ שמתחת למישור $z=1$, וצפיפותה $f(x,y,z)=c$ קבועה. חשב את מסת היריעה.

פתרון: מכיוון ש $z=g(x,y)=x^2+y^2$, נשתמש בנוסחא שראינו: מתקיים $\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\frac{\partial z}{\partial y}=2y$ ונתון $f\left(x,y,g(x,y)\right)=c$. אנו מקבלים אפוא

$$M=\iint_{\sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{R} c\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1}dA=c\iint_{R}\sqrt{4x^2+4y^2+1}dA$$

כאשר R הוא העיגול $x^2+y^2\le c$. את האינטגרל הכפול נחשב בקואורדינטות קוטביות

$$M=c\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{4r^2+1}rdrd\theta=\frac{c}{12}\int_0^{2\pi}\left(4r^2+1\right)\Big|_{r=0}^{1}d\theta=\frac{c}{12}\int_0^{2\pi}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right)d\theta=$$
$$\frac{\pi c}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

הערה: עבור משטח אשר מיוצג בצורה $r(u,v)=x(u,v)i+y(u,v)j+z(u,v)k$ כאשר (u,v) נעה על פני תחום R במישור uv, נקבל את הנוסחא הבאה

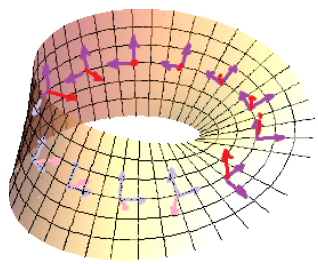
$$M=\iint_{\sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{R} f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\left\|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right\|dA$$

שטף

נסתכל על השדה הוקטורי $F(x,y,z)=f(x,y,z)i+g(x,y,z)j+h(x,y,z)k$. נוכל לראות בשדה זה תיאור של זרימת נוזל במרחב, בכל נקודה נקבל את המהירות של הנוזל באותה הנקודה.

באופן כללי, נרצה לתאר את כמות התנועה של מים דרך משטח σ במרחב. על מנת לעשות זאת נצטרך קודם לדבר על אוריינטציה של משטח. אוריינטציה היא בחירה של נורמל למשטח באופן רציף על המשטח. משטח שעליו ניתן לבחור נורמל למשטח בכל נקודה נקרא אוריינטבילי.

דוגמא: הדוגמא המפורסמת ביותר למשטח שאינו אוריינטבילי הינה טבעת מביוס



עבור משטח אורייטבילי ב $\mathbb{R}^3$ קיימות שתי אוריינטציות אפשריות. נבחר באופן שרירותי אוריינטציה חיובית(עבור משטח אוריינטבילי) ואם נכפול ב -1 נקבל את האוריינטציה השנייה. עבור משטח סגור(ספירה למשל) ניתן לראות באוריינטציה חיובית כנורמל החיצוני למשטח ואילו לאוריינטציה השנייה כנורמל הפנימי.

<u>חישוב השטף</u>

בהינתן אוריינטציה על המשטח σ נוכל לחשב את את השטח ע"י אינטגרל משטחי:

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \mathbf{n}(x,y,z)\, dS$$

דוגמא: יהי σ חלק של המשטח $z = 1 - x^2 - y^2$ הנמצא מעל מישור xy, ונניח של σ אוריינטציה כלפי מעלה . חשב את השטף Φ של שדה הזרימה $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ דרך σ . המשטח הוא מהצורה $z - 1 + x^2 + y^2 = 0$, לכן על מנת למצוא את הנורמל למשטח נסתכל על הגריידנט של הפונקציה $G(x,y,z) = z - 1 + x^2 + y^2$. כלומר $\nabla G = (2x, 2y, 1)$ ולכן

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} = \pm \frac{(2x,2y,1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}\ .$$

מכיוון שהאוריינטציה היא כלפי מעלה נבחר $\mathbf{n} = \dfrac{(2x,2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$. מכאן ש

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA = \iint_{R} \mathbf{F} \cdot \frac{(2x,2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dA$$

$$= \iint_{R} (x,y,z) \cdot (2x,2y,1)\, dA = \iint_{R} 2x^2 + 2y^2 + \left(1 - x^2 - y^2\right) dA =$$

$$= \iint_{R} \left(x^2 + y^2 + 1\right) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r^2 + 1\right) r\, dr\, d\theta = \frac{3\pi}{2}$$