

מבוא לטופולוגיה - תרגיל 11

שאלה 1

הוכיחו שאם B_i הוא בסיס לטופולוגיה במ"ט X_i ($1 \leq i \leq n$) אז האוסף של כל הקבוצות מסוג $G_1 \times \dots \times G_n$ כאשר $G_i \in B_i$ הוא בסיס לטופולוגית מכפלה ב- $X_1 \times \dots \times X_n$.

שאלה 2

הוכיחו שהטופולוגיה ב- $(X_1 \times \dots \times X_n) \times (Y_1 \times \dots \times Y_m)$ היא אותה הטופולוגיה שב- $X_1 \times \dots \times X_n \times Y_1 \times \dots \times Y_m$.
הערה אפשר להניח שמהבחינה הקבוצתית שתי הקבוצות האלה זהות, כלומר, הן מכילות אותם האיברים:

$$\begin{aligned} (X_1 \times \dots \times X_n) \times (Y_1 \times \dots \times Y_m) &= \\ X_1 \times \dots \times X_n \times Y_1 \times \dots \times Y_m &= \\ \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \mid x_i \in X_i, y_j \in Y_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \end{aligned}$$

שאלה 3

הוכיחו שהטופולוגיה הרגילה ב- \mathbb{R}^n היא טופולוגית המכפלה.

שאלה 4

יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים ו- $A, F \subseteq X ; B, G \subseteq Y$.
הוכיחו: א) אם F, G סגורות אז $F \times G$ סגורה.
ב) $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

שאלה 5

יהיו $F, G \subseteq M$ שתי קבוצות קומפקטיות במרחב מטרי M . הוכיחו שקימות נקודות $x_0 \in F$ ו- $y_0 \in G$ כך ש- $d(x_0, y_0) = \inf_{\substack{x \in F \\ y \in G}} d(x, y)$.