מעשה בשני חרוטים וקובייה אחת

דורית פטקין
ורותי ברקאי

הקדמה

קיימת הסכמה בין העוסקים בחינוך מתמטי, לגבי החשיבות של פיתוח ראייה ויזואלית לקידום חשיבה מתמטית בכלל, וחשיבה ויזואלית בפרט.

גאומטריה של המרחב הוא אחד הנושאים הנלמדים החל מגן הילדים, לאורך כל שנות הלימוד בבית הספר היסודי. הוא ממשיך להיות נושא חשוב בלימודים בבית הספר התיכון, ובמכללות להכשרת מורים בתחום המתמטיקה. מחקרים לא מעטים נעשו אודות חשיבה של ילדים בנושא תובנה מרחבית בכלל, ותפישת המושגים הקשורים בצורות גאומטריות מרחביות בפרט (Yackel & Wheatley, 1991; Shaw, 1990; Hannibal, 1999; Clements & Battista, 1992; Koester, 2003). תובנה מרחבית בנויה משני מרכיבים, האחד הוא ראייה מרחבית, והשני הוא אוריינטציה מרחבית. אוריינטציה מרחבית היא התמצאות במרחב. ראייה מרחבית היא היכולת לדמיין מראה של צורות דו-ממדיות וגופים, ותזוזה או שינויים בתכונותיהם (Del Grande, 1990). פיתוח ראייה מרחבית מתבסס על התנסויות ופעילויות של הלומדים (Patkin & Sarfaty, 2012). ארגון ה- NCTM הגדיר מספר סטנדרטים, עקרונות וכלים להוראת המתמטיקה בגילאים שונים. המסמך מציין במפורש, כי פיתוח ויזואליזציה הוא אחד מהכלים לפתרון בעיות מתמטיות. כמו כן, המסמך מכיר בחשיבות של היכולת לייצג ולפרש רעיונות מתמטיים באמצעים ויזואליים כולל גרפים, סרטוטים ודיאגראמות (NCTM, 2000). וולקר, ווינר, הטלנד, סימונס וגולדשמיט (Walker, Winner, Hetland, Simmons & Goldsmith, 2011) טוענים כי למרות ההכרה בחשיבות של יכולת ויזואלית בלמידת מתמטיקה, ניתנת לכך התייחסות מעטה בתכניות לימודים שונות. לטענתם, אפילו הנדסת המרחב נלמדת, בדרך כלל, עם דגש חזק על ההיבט הפורמלי ועל הייצוג הסימבולי ופחות על ראייה ויזואלית. הוראה המשלבת היבט פורמלי והיבט ויזואלי מסייעת להשלמת ההמשגה של רעיונות הנדסיים, וליכולת להתמודד עם משימות הנדסיות, (שם). תמיכה בעמדה זו מגיעה מעבודתו של המתמטיקאי ויליאם תרסטון

(William Thurston) זוכה מדליית פילדס לשנת 1982, אשר התפרסם בהדגמת כוחם של ייצוגים חזותיים להמשגה של רעיונות מתמטיים מופשטים. הוא טוען כי השימוש בכלים ויזואליים לייצוג רעיונות מתמטיים מופשטים תורם יותר מאשר הוכחות פורמליות, ולכן פיתח דרכים להוראת גאומטריה באמצעות טיעונים חזותיים (Horgan, 1993). וולקר ושות' (Walker et al. 2011) בדקו במחקרם האם לסטודנטים לאמנות, תחום דעת המצריך יכולת ויזואלית מנטלית גבוהה, יש חשיבה גאומטרית מתקדמת. במחקרם השתתפו שתי קבוצות של סטודנטים: 18 סטודנטים לאמנות ו- 18 סטודנטים לפסיכולוגיה, שהתבקשו לענות על שאלון בגאומטריה, שכלל 27 פריטים הבודקים יכולת ויזואלית מנטלית. מטלות אלו לא היו תלויות בידע גאומטרי פורמלי של הסטודנטים, כגון הגדרות, משפטים והוכחות, אלא התמקדו בחשיבה גאומטרית, ודרשו תפיסה ויזואלית בדו-ממד ותלת-ממד. מממצאי מחקרם עולה כי הסטודנטים לאמנות הפגינו יכולות טובות יותר בפתרון המטלות הגאומטריות, ונמצא הבדל משמעותי ביכולות הוויזואליות מנטאליות שלהם, לעומת היכולות הוויזואליות של הסטודנטים לפסיכולוגיה. ממצאים אלו מצביעים על כך שפיתוח יכולת ויזואלית באמנות משפרת את החשיבה הגאומטרית. בהתאם לכך, במטרה לשפר ולקדם את הראייה והחשיבה הגאומטרית של תלמידים, נראה כי יש חשיבות בפיתוח הראייה הוויזואלית שלהם לאו דווקא בהקשר להוראה ולמידת נושאים בגאומטריה, אלא תוך פיתוח יכולות אלו בלמידה אינטגרטיבית, כמו למשל באמנות. כלומר, שימוש במגוון מטלות העוסקות בתפיסה מנטלית-ויזואלית ומעבר מדו-ממד לתלת-ממד וההפך, במגוון תחומים בהם עוסקים הלומדים, יכולים לעזור בפיתוח התפיסה המרחבית של התלמידים ולהביא אותם לחשיבה גאומטרית מתקדמת.

המחקר שיוצג להלן, בוחן את ההתייחסות של סטודנטים המתכשרים להוראת מתמטיקה, לשתי מטלות בהנדסת המרחב הבוחנות יכולת מנטלית-ויזואלית. כמו כן, נבדקה הסוגיה: האם קיימים הבדלים בחשיבה של מתכשרים להוראת המתמטיקה בשנת ההכשרה הראשונה שלהם, לעומת מורים למתמטיקה בבית ספר יסודי, הלומדים לימודי תואר שני בחינוך מתמטי, ובין אלה העושים הסבה מקצועית להוראת מתמטיקה בחטיבות הביניים.

שאלות המחקר

1. מהי יכולתם הוויזואלית-מנטלית של מורים ומתכשרים להוראת מתמטיקה בהתייחס למניפולציות על צורות גאומטריות (מדו-ממדיות לתלת-ממדיות)?
2. האם קיימים הבדלים ביכולתם הוויזואלית-מנטלית של מורים ומתכשרים להוראת מתמטיקה בנקודות ציון שונות במהלך הכשרתם?

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר

אוכלוסיית המחקר מנתה 87 מורים ומתכשרים להוראת מתמטיקה, הלומדים במכללה אקדמית להכשרת מורים. המשתתפים היו משלוש קבוצות שונות: 46 סטודנטים הלומדים בשנה הראשונה להכשרתם כמורים למתמטיקה בבית הספר היסודי, 23 מורים למתמטיקה הלומדים לתואר שני בחינוך מתמטי לבית ספר יסודי, ו- 18 סטודנטים בעלי תואר ראשון או שני בתחום דעת אחר, העושים הסבה מקצועית להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי ובחטיבת הביניים.

כלי המחקר

כלי המחקר כלל שאלון ובו שתי מטלות. המטלות לקוחות מתוך מקבץ של 27 מטלות שפותחו על ידי וולקר ושות' (Walkeret et al. 2011). כאמור, מטלות אלו אינן תלויות בידע של גאומטריה פורמלית כגון הגדרות, משפטים והוכחות, אלא מתמקדות בחשיבה גאומטרית. מטלות אלו דורשות להסתמך על ראייה, זיכרון חזותי, ויכולת לדמיין ולבחון טרנספורמציות מרחביות שונות. במטרה לבחון את יכולתם, של המורים והסטודנטים, לפתור את המטלות באמצעות הדמיה מנטלית, ללא מניפולציה של ייצוגים חיצוניים, הם התבקשו להשיב על המטלות באופן מפורט ככל האפשר, במילים, **מבלי להיעזר בסרטוט.** באם נעזרו בסרטוט, התבקשו הסטודנטים להסביר לצורך מה ובאיזה שלב של מתן התשובה הם נעזרו בסרטוט (לפני הפתרון, תוך כדי, או כגיבוי לפתרון שהציעו). שתי המטלות (בהמשך יובא פירוט המטלות) נבחרו כך שאחת המטלות היא מטלה פחות שגרתית מאשר השנייה. מטלה אחת עסקה בגוף סיבוב לא שגרתי (גוף המורכב משני חרוטים בעלי בסיס משותף), ואילו המטלה השנייה עסקה בגוף שגרתי ומוכר לכל הלומדים - הקובייה. כלומר, רצינו לבחון האם קיים הבדל בתשובות הנשאלים וביכולות הוויזואליות שלהם בהשוואה בין מטלה שגרתית (קובייה) לבין מטלה פחות שגרתית (גוף סיבוב המורכב משני חרוטים בעלי בסיס משותף).

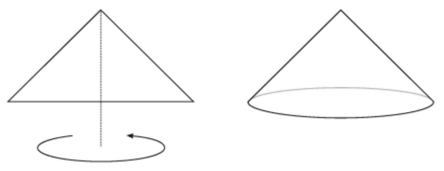
בחרנו להציג רק שתי מטלות מתוך ידיעה וניסיון שחשיפה למגוון רחב של מטלות עשוי להוות סוג של תרגול (התערבות). בשלב זה של המחקר רצינו להימנע מכך. כמו כן, לא רצינו ליצור עומס על הנשאלים, שכתוצאה מכך יירתעו מלענות בצורה מנומקת ומפורטת על השאלות המתייחסות למטלות אלה.

להלן שתי המטלות:

מטלה ראשונה: דמיינו שאתם מחזיקים ביד ריבוע מנייר, ואוחזים אותו בקצות שני קדקודים נגדיים. עתה אתם מסובבים את הריבוע כך שהאלכסון משמש כציר סיבוב. איזה גוף מתקבל?

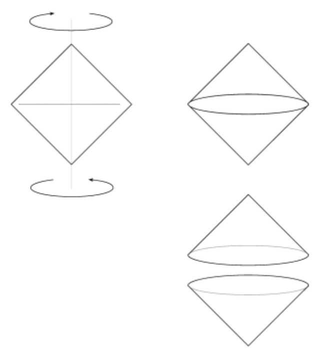
מטלה שנייה: נתונה קובייה. אם מבקשים לצבוע את כל הפאות של הקובייה כך שלא תהיינה שתי פאות סמוכות בעלות אותו צבע. כמה צבעים שונים דרושים לדעתכם לביצוע המשימה?

המטלה הראשונה דורשת יכולת מנטלית-ויזואלית של גוף תלת-ממדי המתקבל מסיבוב של צורה (דו-ממדית) מורכבת. סיבוב דף ריבועי כשאלכסונו משמש כציר סיבוב, יוצר גוף תלת-ממדי המורכב משני חרוטים בעלי בסיס משותף. נציין כי, סיבוב משולש שווה-שוקיים (וישר-זווית) סביב הגובה לבסיס המשולש, יוצר את הגוף התלת-ממדי חרוט (ראו איור א1 - סיבוב משולש שווה-שוקיים).



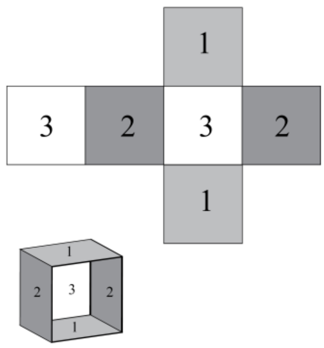
איור א1 - סיבוב משולש שווה-שוקיים

אלכסון הריבוע מחלק אותו לשני משולשים שווי-שוקיים חופפים, ולכן סיבוב דף ריבועי סביב אלכסונו יוצר גוף המורכב משני חרוטים בעלי בסיס משותף (ראו איור ב1).



איור 1ב - סיבוב דף ריבועי סביב אלכסונו

המטלה השנייה דורשת לדמיין גוף מוכר (קובייה) שיש לבצע עליו מניפולציה מנטלית (צביעה של פאות הקובייה), ולאחר מכן לתאר את התוצאה. המטלה התמקדה במספר המינימלי של צבעים הנדרש כדי לצבוע את פאות הקובייה, כך שלא תהיינה שתי פאות סמוכות בעלות אותו צבע. כידוע, לקובייה יש שש פאות, וכל פאה בקובייה סמוכה לארבע הפאות האחרות בה, ואינה סמוכה (אלא מקבילה) לפאה אחת של הקובייה. לקובייה יש שלושה זוגות של פאות מקבילות, ולכן המספר המינימלי של צבעים שיקיים את תנאי המטלה הוא שלושה צבעים (ראו איור 2).



איור 2 - הקובייה

מהלך המחקר

השאלון חולק, לכל אחת מהקבוצות, כחלק ממבחן מסכם בקורסים לגאומטריה, שלמדו בהתאם לשנת הכשרתם ולמסלולים השונים (שנה א - תואר ראשון, תואר שני, הסבה מקצועית). הקורסים ניתנו על-ידי החוקרות. תשובה מלאה על כל אחת משתי מטלות אלו, זיכתה את העונים עליה ב- 5 נקודות (סך-הכול 10 נקודות). לא הייתה עדיפות לסדר בו בחרו הנשאלים לענות על כל אחת מהמטלות.

ממצאים

טבלה מספר 1 מציגה את שכיחות התשובות הנכונות, ושכיחות התשובות השגויות, של המורים והמתכשרים להוראת המתמטיקה למטלה הראשונה, בה הם התבקשו לזהות את הגוף שמתקבל מסיבוב דף ריבועי כשאלכסונו משמש כציר סיבוב (הגוף המתקבל הוא גוף הבנוי משני חרוטים בעלי בסיס משותף). כמו כן, הטבלה מציגה את שכיחות הסטודנטים שלא ענו על מטלה זו. הטבלה מתייחסת לכל אחת משלוש הקבוצות שהשתתפו במחקר זה: סטודנטים בשנה הראשונה להכשרתם בהוראת המתמטיקה לבית ספר יסודי, סטודנטים במסלול להסבה מקצועית להוראת המתמטיקה לחטיבת הביניים, ומורים בבית ספר יסודי הלומדים לתואר שני בחינוך מתמטי.

	N	**תשובה נכונה (%)**	**תשובה שגויה (%)**	**לא ענו (%)**
שנה א	46	0	89	11
הסבה	18	39	33	28
תואר שני	23	17	61	22
סה"כ	**87**	**13**	**70**	**17**

טבלה מס' 1 - התפלגות התשובות (באחוזים) במטלת החרוטים

מטבלה מספר 1 עולה כי רק 13% מהסטודנטים שהשתתפו במחקר זה ענו נכונה וזיהו כי הגוף

המתקבל הוא שני חרוטים בעלי בסיס משותף. סטודנטים אלה הם סטודנטים מהמסלול להסבת אקדמאים להוראת מתמטיקה בחטיבת ביניים, וסטודנטים הלומדים לתואר שני במסלול לחינוך מתמטי בבית ספר יסודי. אף אחד מהסטודנטים הלומדים בשנה א בהתמחות בהוראת מתמטיקה לבית ספר היסודי לא ענה תשובה נכונה לשאלה זו. מהטבלה ניתן לראות כי רק 11% מהסטודנטים הלומדים בשנה ראשונה להכשרתם לא ענו על מטלה זו, לעומת זאת מבין הלומדים לתואר שני, ומבין אלו הלומדים במסלול להסבה מקצועית, אחוז הלא משיבים גדול פי שניים ואף יותר (22% ו- 28% בהתאמה).

בהתייחס לסטודנטים שענו נכון על מטלה זו, נמצא כי רק חמישה סטודנטים (מתוך כלל 11 הסטודנטים שענו נכון) הציגו נימוקים. כל הנימוקים שהוצגו היו נכונים והתייחסו לתכונות קריטיות של הגוף הנוצר:
"הקוטר הוא אלכסון הריבוע. הקו היוצר הוא צלע הריבוע."; "רדיוס הבסיס שלהם הוא חצי אלכסון הריבוע וגובהם מחצית אלכסון הריבוע, ומדביקים אותם בבסיסיהם."; "קצות הריבוע (הקדקודים שאיננו מחזיקים) יוצרים בסיס מעגלי (אוסף של נקודות במרחק שווה ממרכז הריבוע שהופך להיות מרכז המעגל)."; "צלע הקובייה תהפוך לקו היוצר של החרוט בכל צד, וקדקוד החרוטים יהיו קדקודי הקובייה הנגדיים המוחזקים בשתי הידיים. הסיבוב על ציר אלכסון הקובייה (הטעות במקור - התכוון לריבוע) הופך את אלכסון הקובייה לחיבור של 2 גבהי החרוט".

מעניין לציין כי חלק מהסטודנטים, כולל כאלו שלא הציגו נימוק מתמטי, תיארו את תהליך קבלת ההחלטה שלהם לגבי התשובה (הנכונה): "נעזרתי בדף של המבחן כדי לראות מה מקבלים. לקח לי זמן כדי להבין את הבעיה. רק לאחר כמה סיבובים של הדף ראיתי שזה שני חרוטים מחוברים בבסיס"; "חשוב לציין! סיבוב של ריבוע נעשה בראש, אך כגיבוי סובבתי מחברת מבחן"; "נעזרתי בסרטוט ובעיקר בממחטה על מנת להבין את המשמעות של סיבוב סביב הציר האחד בזמן שהציר השני (האלכסון השני) מסתובב".

טבלה מספר 2 מציגה את מגוון התשובות השגויות שהציגו המשתתפים במחקר זה למטלה הראשונה. הטבלה מתייחסת לשכיחות התשובות השגויות שהתייחסו לגופים תלת-ממדיים, ולשכיחות התשובות השגויות שהתייחסו לצורות מישוריות.

	התשובה	שנה א	הסבה	תואר שני	סך הכול
		N=41	N=6	N=14	N=61
גוף	חרוט	3	---	1	4
	גליל	12	---	1	13
הנדסת-המרחב	כדור	---	3	3	6
	פירמידה	---	---	2	2
	קובייה	2	1	1	4
	מנסרה מרובעת-תיבה	2	---	---	2
	2 פירמידות ריבועיות עם בסיס משותף – תמניון	4	---	3	7
	גוף דק מאוד	1	---	---	1
צורה מישורית	ריבוע	4	---	2	6
	עיגול	2	---	---	2
	משולש	3	2	1	6
הנדסת-המישור	מעוין	4	---	---	4
	דלתון	2	---	---	2
	מקבילית	1	---	---	1
	אחר	1	---	---	1

טבלה מס' 2 - התפלגות התשובות השגויות במטלת החרוטים

מטבלה מספר 2 ניתן לראות כי התשובה השגויה השכיחה בקרב הסטודנטים הלומדים בשנה הראשונה להכשרתם הייתה: גליל. ייתכן שתשובה זו ניתנה מתוך ידיעה כי מסיבוב דף נייר מלבני סביב אחת מצלעותיו מתקבל גליל. תשובה זו לא התייחסה לכך שציר הסיבוב במטלה אינו אחת מצלעות הריבוע אלא אלכסונו. שאר התשובות השגויות של סטודנטים אלו היו מגוונות. הוצגו עוד 12 סוגי גופים וצורות שגויים. בהתייחס לסטודנטים הלומדים במסלול להסבה להוראת המתמטיקה מחצית מהסטודנטים שהציגו תשובה שגויה (3 מתוך 6) ציינו כי הגוף שיתקבל יהיה כדור. המורים הלומדים לתואר שני הציגו אף הם מגוון תשובות שגויות: 11 סטודנטים התייחסו, בתשובתם השגויה לגופים, ושלושה סטודנטים התייחסו לצורות מישוריות.

טבלה מספר 3 מציגה את שכיחות התשובות הנכונות, ושכיחות התשובות השגויות שהציגו המורים והמתכשרים להוראת המתמטיקה למטלה השנייה. במטלה זו הם התבקשו למצוא מהי כמות הצבעים המינימלית הדרושה, על מנת לצבוע את כל פאות הקובייה כך שלא תהיינה שתי פאות סמוכות בעלות אותו צבע (מספר הצבעים המינימלי הוא שלושה.) כמו כן, הטבלה מציגה את שכיחות הסטודנטים שלא ענו על מטלה זו. הטבלה מתייחסת לכל אחת משלוש הקבוצות שהשתתפו במחקר זה.

.	N	תשובה נכונה	תשובה שגויה	לא ענו
שנה א	46	85	11	4
הסבה	18	83	6	11
תואר שני	23	87	4	9
סה"כ	**87**	**85**	**8**	**7**

טבלה מס' 3 - התפלגות התשובות (באחוזים) במטלת הקובייה

בשונה מהממצאים שהתקבלו לגבי המטלה הראשונה, מטבלה מספר 2 ניתן לראות כי כמעט כל הסטודנטים (85%) ענו נכון על מטלה זו, ואחוז המשיבים נכון, בכל אחת מהקבוצות השונות שהשתתפו במחקר זה, היה דומה (83%-87%). סביר להניח כי ההבדל ביכולתם של המורים והסטודנטים לענות נכון על מטלה זו לעומת יכולתם לענות נכון על המטלה הראשונה, נובע מכך שמטלה זו הציגה גוף המוכר למשתתפים והם יכלו לדמיין בקלות את הגוף. במטלה הראשונה התבקשו הסטודנטים להתייחס לגוף מורכב (שני חרוטים בעלי בסיס משותף) המתקבל מסיבוב סביב ציר סימטריה (אלכסון ריבוע).

כל המורים וסטודנטים (מלבד חמישה), שענו נכון על מטלה זו (מטלת הקובייה) הציגו נימוק לתשובתם (הנכונה). הנימוקים שהציגו המשתתפים היו דומים והתייחסו לכך שכל שתי פאות מקבילות אפשר לצבוע באותו הצבע, ובקובייה יש שלושה זוגות של פאות מקבילות: "לקובייה יש 6 פאות, כל פאה מקבילה (וחופפת) לפאה אחרת. לכן 2 פאות מקבילות תצבענה באותו צבע. בקובייה יש 3 זוגות כאלו ולכן צריך 3 צבעים."; "מספר הצבעים המינימלי לביצוע המשימה הוא 3 צבעים - צבע אחד לכל זוג פאות נגדיות [מקבילות]".

מרבית הנימוקים הדגישו כי כל פאה בקובייה, סמוכה לארבע פאות ולכן אינה סמוכה רק לפאה אחת של הקובייה, כלומר, שתי פאות אלו יכולות להיצבע באותו צבע. מכאן הסיקו כי כל שתי פאות (מקבילות) יכולות להיצבע באותו צבע, וכי בקובייה יש שלושה זוגות כאלו: "בקובייה יש 6 פאות וכל פאה סמוכה ל- 4 פאות, ולכן לא סמוכה רק לפאה שמולה. לכן אם נחלק 6 ב- 2 נקבל שלוש"; "כל פאה בקובייה 'נוגעת' ב- 4 פאות אחרות, אך מתוך הארבע שהיא נוגעת בהן - 2 הן נגדיות, ולכן מספיק 3 צבעים (6:2=3).";"בקובייה 6 פאות, לכל פאה מקצוע משותף עם ארבע פאות אחרות. כלומר, יש רק פאה אחת שלא סמוכה אליה. לכן, שתי פאות מקבילות ייצבעו באותו צבע."

מעניין לציין שלא היה הבדל בין סוגי הנימוקים שהציגו המורים הלומדים לתואר שני לבין הסטודנטים הלומדים בשנה הראשונה להכשרתם, ובין אלו הלומדים במסלול להסבה מקצועית להוראת המתמטיקה בחטיבת הביניים.

מרבית הסטודנטים שענו תשובה שגויה במטלה זו (בסך-הכול שבעה סטודנטים) טענו כי יידרשו חמישה צבעים: "אפשר להסתפק בחמישה צבעים משום שכל פאה יש לה ארבע פאות סמוכות.

אפשר לבחור זוג פאות נגדיות ולצבוע אותן באותו צבע ועוד ארבע פאות נוספות בצבעים שונים."; "חמישה צבעים. ארבע פאות סמוכות אחת לשנייה ושני הבסיסים אינם סמוכים. לכן דרוש צבע אחד לבסיסים ו- 4 צבעים שונים למעטפת". נימוקים אלו אינן מתייחסים לכך שהפאה שהם בחרו הנה אקראית, וכי נימוק זה תקף לכל בחירה של פאה של הקובייה, ולכן כל זוג פאות מקבילות ניתן לצבוע באותו צבע.

סטודנט אחד טען כי מספיקים ארבעה צבעים: "כל פאה באה ב'מגע' עם ארבע פאות שונות, ולכן נסתפק בארבעה צבעים". סטודנט אחר טען: "צריך 6 צבעים היות ולקובייה יש שש פאות".

דיון ומסקנות

מטרות המחקר היו: א. לבחון את היכולת הוויזואלית-מנטלית של מורים ומתכשרים להוראת מתמטיקה, בהתייחס למניפולציות על צורות גאומטריות. ב. לבדוק האם קיימים הבדלים בין היכולת הוויזואלית-מנטלית של המורים לבין היכולת המנטלית-ויזואלית של המתכשרים להוראת מתמטיקה, בנקודות ציון שונות במהלך הכשרתם.

מחקרים שהתמקדו בקשר בין יכולות ויזואליות (למשל, של סטודנטים לאמנות), לבין חשיבה גאומטרית מופשטת, מצביעים על כך כי אמנות חזותית יכולה לסייע בלמידה של הגאומטריה, ולהעמקה בהבנה הגאומטרית. ראייה חזותית יכולה להיות כלי יעיל לקידום ההבנה הגאומטרית, בעיקר כאשר מתמקדים בחשיבה גאומטרית דינמית, במקום בשינון ויישום של כללים ויחסים גאומטריים סטטיים (Seago, Driscoll & Jacobs, 2010; Walker, et al. 2011). מממצאי המחקר הנוכחי עולה כי מורים למתמטיקה ומתכשרים להוראת מתמטיקה, שכולם בעלי השכלה תיכונית, הכוללת תעודת בגרות במתמטיקה, שנחשפו בצורה ישירה או עקיפה לגאומטריה של המרחב בלימודיהם הקודמים (ההבדל ביניהם הוא מספר יחידות הלימוד במתמטיקה שלמדו בתיכון), הפגינו חוסר יכולת ויזואלית-מנטלית במטלה פחות מוכרת ולא שכיחה בעולמם המקצועי: זיהוי הגוף המתקבל כתוצאה של סיבוב ריבוע סביב אלכסונו (13 % ענו נכון, ו- 70% שגו). ממצא זה מאפיין את כלל המשתתפים במחקר זה ללא הבחנה בקבוצת השיוך שלהם (מורים ומתכשרים להוראה). במטלה המוכרת והשכיחה, בה משתתפי המחקר נתקלו במסגרת לימודיהם או בהוראה שלהם בפועל, הפגינו רוב המשתתפים (85%) יכולת ויזואלית-מנטלית גבוהה. גם במטלה זו, בדומה למטלה הראשונה, לא נמצאו הבדלים בין התת-קבוצות של אוכלוסיית המחקר.

בהתייחס לשגיאות שהציגו המשתתפים נמצא, כי במטלה של הקובייה שגו רק מעטים (כאמור 8% שגו, ו- 7% לא ענו), כאשר השגיאה האופיינית נובעת, ככל הנראה, מחוסר שליטה בתכונות הקובייה, לדוגמה: לכל פאה בקובייה יש פאה אחת נגדית מקבילה לה, ללא מקצוע משותף. במטלה של החרוטים נמצא מגוון רחב של שגיאות (70%, ו- 17% לא ענו), כאשר חלק מהשגיאות מאופיינות כתפיסה מוטעית במעבר מצורה דו-ממדית לצורה תלת-ממדית. חלק גדול מהטועים התייחס לגליל או חרוט מצד אחד, או לגופים שאינם בעלי בסיס עגול, כמו תיבה או קובייה. תפיסה מוטעית מאפיינת נוספת שנמצאה, הייתה חוסר ההשפעה של הסיבוב על ממדי הצורה, כלומר היו משתתפים שתפסו את הצורה המתקבלת לאחר הסיבוב כצורה דו-ממדית.

שימוש ברעיונות אופרטיביים, כדוגמת המטלות שהוצגו במאמר זה, יכול לפתח את התפיסה המרחבית של הלומדים, ולסייע לעוסקים בהוראת הגאומטריה להביא את התלמידים לחשיבה גאומטרית מתקדמת.

לאור החשיבות והתרומה של יכולת ויזואלית-מנטלית לחשיבה הגאומטרית, גם לצורך לימודי תחום דעת אחר, כמו אמנות לדוגמה, מומלץ לשלב בהוראת הגאומטריה פעילויות המטפחות ומפתחות יכולת ויזואלית-מנטלית בכל שלבי הלימודים ובמסלולים השונים, החל מגן הילדים ועד הכשרה אקדמית. כמו כן, אנו רואות חשיבות בפיתוח היכולת המנטלית-ויזואלית של התלמידים לא רק במסגרת הוראת הגאומטריה אלא גם בתחומים נוספים, ובכך לפתח את התפיסה המרחבית שלהם ולקדם את החשיבה הגאומטרית שלהם. המלצות אלו מקבלות תימוכין גם מאותם מחקרים (Gardner, 2000; Walkeret et al. 2011) הממליצים לעודד מורים לאמנות לשיתוף פעולה עם חבריהם בתחומים אקדמיים שונים, תוך התמקדות על העברה מתחום אחד למשנהו. שיתוף פעולה זה עשוי לספק חינוך מקיף המתאים למאה ה- 21 גם עבור סטודנטים לאמנות וגם לאנשי אקדמיה אחרים, ולהכין אותם לעתיד שבו יהיו בעלי כישורים שבאמצעותם יוכלו לבצע סינתזה של ידע מתחומי דעת מגוונים.

מקורות

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In G. Douglas (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 420-464). New York: Macmillian.

Del Grande, J. (1990). Spatial Sense. *Arithmetic Teacher*, *37*(6), 14-20.

Gardner, H. (2007). *Five Minds for the Future. Cambridge*. MA: Harvard Business School Press.

Hannibal, M. A. (1999). Young Children's Developing Understanding of Geometric Shapes. *Teaching Children Mathematics 2*, 353-357.

Horgan, J. (1993). The death of proof. *Scientific American*, (pp. 92-103).

http://www.math.uh.edu/~tomforde/Articles/DeathOfProof.pdf.

Koester, B. A. (2003). Prisms and Pyramids: Constructing Three-Dimensional Models to Build Understanding. *Teaching Children Mathematics*, *9*(8), 436-442.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va.: NCTM

Patkin, D., Sarfaty, Y. (2012). The effect of solid geometry activities of pre-service elementary school mathematics teachers on concepts understanding and mastery of geometric thinking levels. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education. Series D: Research in Mathematical Education. 16*(1), 31-50.

Seago, N., Driscoll, M., & Jacobs, J.(2010). Transforming Middle School Geometry: Designing Professional Development Materials that Support the Teaching and Learning of Similarity. *Middle Grades Research Journal, 5*(4), 199-211.

Shaw, J. M. (1990). By Way of Introduction. *Arithmetic Teacher*, *37*(6), 4-5.

Walker, C. M., Winner, E., Hetland, L., Simmons, S., & Goldsmith, L. (2011). Visual Thinking: Art Students Have an Advantage in Geometric Reasoning. *Creative Education, 2*(1), 22-26.

Yackel, E., & Wheatley, G. H. (1990). Promoting Visual Imagery in Young Pupils. *Arithmetic Teacher*, *37*(6), 52-58.

פרופ' דורית פטקין
מרצה בכירה לחינוך מתמטי במכללת סמינר הקיבוצים בתל-אביב, מדריכה מורים ו"פרחי הוראה", בעלת ניסיון עשיר בדרכי הוראה ובטיפול בטעויות ובתפיסות מוטעות של תלמידים במתמטיקה.

ד"ר רותי ברקאי
ראש החוג למתמטיקה במכללת סמינר הקיבוצים, מרצה לחינוך מתמטי במכללת סמינר הקיבוצים ובחוג לחינוך מתמטי, מדעי וטכנולוגי באוניברסיטת תל אביב. מתמקדת בהתפתחות מקצועית של מורים וסטודנטים להוראת המתמטיקה, הוראת המתמטיקה בגיל הרך, בתפיסות מוטעות במתמטיקה ושימוש בשגיאות בהוראת המתמטיקה.