אנליזה מודרנית 1 -תרגול 9

**השתנות חסומה:**

תזכורת: אם  ,  (P חלוקה של  ) ע"י הנקודות  מגדירים את ההשתנות של f ביחס לP- ע"י  , ואת ההשתנות הטוטאלית של f בקטע [a,b] ע"י 

הגדרה: אם  אומרים ש-f בעלת השתנות חסומה בקטע. מרחב כל הפונקציות בעלות השתנות חסומה הוא .

הגדרה: אומרים שחלוקה  היא עידון של החלוקה , אם Q מתקבלת מ-P ע"י הוספת מספר סופי של נקודות.

1. תרגיל: תהיינה  חלוקות ו-P\* מעדנת את P. הוכיחו כי 

פתרון: תחילה, נניח כי P\* התקבלה מ-P ע"י הוספת נקודה אחת בלבד, x\* הנמצאת בקטע  . אם כך:  ואם P\* התקבלה ע"י הוספת N נקודות, חוזרים על ההוכחה שלעיל N פעמים.

1. תרגיל: תהי  חלוקה, הוכיחו כי 

פתרון: נניח כי מדובר על חלוקה בת שני קטעים (אחרת, כמו מקודם אפשר לחזור על ההוכחה)  ויש להראות  .

 : תהי  , נעדן את P ע"י הוספת הנקודה c (אם אינה נמצאת):

 הראינו כי כל איברי הקבוצה  חסומים מלעיל ע"י  ולכן גם הsup שלה מקיים  וזה הא"ש המבוקש.

 : יהי , ע"פ האפיון של sup יש חלוקות  המקיימות ,  . נחבר את הא"ש לקבל .  היא חלוקה של  וקל לראות כי  . ז"א . נשאיף  לקבל התוצאה.

1. תרגיל: תהי  פונקציית דיריכלה,  הוכיחו שבכל קטע  (קטע עם אורך חיובי!) מתקיים 

פתרון: יהי  טבעי. על סמך צפיפות הרציונליים והאי-רציונליים בקטע, נוכל לבנות חלוקה  "מתחלפת" – זאת אומרת שהנקודות הן מתחלפות בין רציונליות לאי-רציונליות לסירוגין (לפחות בלי הקצוות, שם אין לדעת). נחשב את ההשתנות:. אם כך הקבוצה  מכילה מספרים גדולים כרצוננו ולכן  .

1. תרגיל: הוכיחו כי הפונקציה  אינה בעלת השתנות חסומה בקטע  .

פתרון: צריכים לתפוס את התנודות של הפונקציה.  מחזירה בנקודות  ומחזירה  בנקודות . לכל  נגדיר שוב חלוקה "מתחלפת" 

מקבלים 

וכאשר  מקבלים טור מתבדר. מכאן ה-sup הוא אינסוף.

1. תרגיל: תהי 

א. הוכיחו כי לכל  קיימים הגבולות החד צדדיים  (מכאן שלפונקציה בעלת השתנות חסומה אין אי רציפות מהסוג השני).

ב. הוכיחו כי קבוצת נקודות אי הרציפות של  היא בת מנייה (וכמובן ממידת לבג 0).

פתרון: ע"פ "משפט הפירוק של ז'ורדן" ניתן לרשום  כאשר  עולות.

א. ידוע שלפונקציות עולות קיימים גבולות חד-צדדיים, ולכן המספרים  קיימים כולם. מאריתמטיקה של גבולות מקבלים כי גם הגבולות החד-צדדיים של f קיימים בכל נקודה.

ב. ידוע מאינפי' שקבוצת נקודות אי הרציפות של פונקציה מונוטונית היא בת מנייה. קבוצת נקודות אי הרציפות של f מוכלת באיחוד של נקודות אי הרציפות של g,h ולכן היא בת מניה.

1. תרגיל: תהי  הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

1.  רציפה בהחלט,  כב"מ (dm) ו-

2. קיימת קבוצה , מדידה לבג כך ש-

פתרון:

 נגדיר . בגלל ש-f רציפה היא מדידה, ולכן גם הנגזרת שלה f' מדידה (תרגול שעבר) ומכאן שהקבוצה A מדידה. עכשיו בגלל ש-f רציפה בהחלט:



  ומכאן f רציפה בהחלט (הכללת לבג חלק א')

ע"פ הכללת לבג  כב"מ, ולכן  כב"מ. ופשוט לראות כי  .

1. הראו כי עבור אינטגרל רימן , באופן כללי, משפט ההתכנסות הנשלטת ומשפט ההתכנסות המונוטונית אינם תקפים.

פתרון: נסתכל על הקטע  ונסדר את  בסדרה  . נגדיר את הפונקציות הבאות:



ברור כי נקודתית, הסדרה  מתכנסת לפונקצית דריכלה. כמו כן, עפ"י משפט שלמדנו פונקציה הינה אינטגרבילית רימן אמ"מ היא רציפה כב"מ. ולכן  אינטגרבילית לכל . אבל פונקצית דריכלה איננה רציפה באף נקודה ולכן איננה אינטגרבילית רימן. מכאן שקיימת סדרה של פונקציות אינטגרביליות רימן המתכנסות מונוטונית לפונקציה חסומה אך הפונקציה איננה אינטגרבילית .