לינארית 2 תשפ"ב מועד ב

מרצה: ד"ר עדי בן צבי.
מתרגלים: אריאל ויצמן, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל, עקיבא מלכה.
יש לענות על כל שאלות הבחינה. ניתן להגיע עד 107 נק.
זמן הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד
המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר.
יש לכתוב את כל התשובות על טופס הבחינה. יש להוכיח ולנמק בכל אחת מן השאלות.

1. יהיו V,W ממ"פ, ותהי $T:V\longrightarrow W$ הע"ל. אזי, $T^*:W\longrightarrow V$ (העתקה הצמודה של T) קיימת ויחידה.(15 נק)

2. אין קשר בין הסעיפים הבאים:

   (א) תהי $A\in\mathbb{C}^{3\times 3}$ לא לכסינה המקיימת $A^4=-A^2$. מהן צורות הגורדן האפשריות של A? (10 נק)

   (ב) הוכיחו כי לא קיימת $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ המקיימת $AA^*+I=A$. (12 נק)

3. יהי V מ"ו ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$, ותהי $T:V\longrightarrow V$ הע"ל.

   (א) נניח ש u הוא ו"ע של T עבור ע"ע λ, וש v הוא ו"ע של T עבור ע"ע μ.
   הוכיחו כי אם $u+v$ הוא ו"ע של T אזי $\lambda=\mu$. (10 נק)

   (ב) נניח כי עבור כל בסיס B של V המטריצה $[T]_B^B$ היא אלכסונית.
   הוכיחו כי קיים סקלר $c\in\mathbb{F}$ כך שלכל $v\in V$ מתקיים $T(v)=cv$. (13 נק)

   (ג) נניח כי $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. ונניח כי עבור כל בסיס B של V המטריצה $[T]_B^B$ היא אלכסונית.
   האם בהכרח T צל"ע? (5 נק)

4. יהי $W:=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\3\\-3\end{pmatrix}\right\}$ תת מרחב של $\mathbb{R}^3$. מצאו את ההיטל האורתוגונלי של הווקטור $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ על W ביחס למכפלה פנימית הבאה:

$$\langle\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\rangle=\frac{1}{2}x_1y_1+x_2y_2+\frac{1}{2}x_3y_3$$

   הוכיחו תשובתכם. (10 נק)

5. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: (8 נק' לסעיף)

   (א) תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית. אזי, $B=A^2-6A+11I$ היא לכסינה.

   (ב) תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ לכסינה שכל הע"ע שלה אי-שליליים. אזי קיימת $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $A=B^2$.

(ג) תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה שכל הע"ע שלה אי-שליליים. ותהי $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ המקיימת ש B^2 היא צורת הז'ורדן של A^2. אזי, B היא צורת הז'ורדן של A.

(ד) יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ ויהי U ת"מ שלו. יהיו $v_1, v_2 \in V$ בעלי אותו היטל על U. אזי, $v_1 - v_2 \in U^\perp$.

בהצלחה!!

שאלה 1: יהיו V,W ממ"פ, ותהי $T : V \longrightarrow W$ הע"ל. אזי, $T^* : W \longrightarrow V$ (העתקה הצמודה של T) קיימת ויחידה.(15 נק)

פתרון:

פתרון שאלה 1 (המשך)

<u>שאלה 2:</u> אין קשר בין הסעיפים הבאים:

א. תהי $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ לא לכסינה המקיימת $A^4 = -A^2$. מהן צורות הגורדן האפשריות של A? (10 נק)

ב. הוכיחו כי לא קיימת $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ המקיימת $AA^* + I = A$. (12 נק)

<u>פתרון:</u>

<u>פתרון שאלה 2 (המשך)</u>

פתרון שאלה 2 (המשך)

פתרון שאלה 2 (המשך)

שאלה 3: יהי V ממ"פ ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$, ותהי $T : V \longrightarrow V$ הע"ל.

1. נניח ש u הוא ו"ע של T עבור ע"ע λ, וש v הוא ו"ע של T עבור ע"ע μ.
הוכיחו כי אם $u + v$ הוא ו"ע של T אזי $\lambda = \mu$. (10 נק)
2. נניח כי עבור כל בסיס B של V המטריצה $[T]_B^B$ היא אלכסונית.
הוכיחו כי קיים סקלר $c \in \mathbb{F}$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים $T(v) = cv$. (13 נק)
3. נניח כי $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. ונניח כי עבור כל בסיס B של V המטריצה $[T]_B^B$ היא אלכסונית.
האם בהכרח T צל"ע? (5 נק)

פתרון:

פתרון שאלה 3 (המשך)

פתרון שאלה 3 (המשך)

פתרון שאלה 3 (המשך)

<u>שאלה 4:</u> יהי $W := sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$ תת מרחב של $\mathbb{R}^3$. מצאו את ההיטל האורתוגונלי של הווקטור $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ על W ביחס למכפלה פנימית הבאה:

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{2}x_1y_1 + x_2y_2 + \frac{1}{2}x_3y_3$$

הוכיחו תשובתכם. (10 נק)

<u>פתרון שאלה 4:</u>

פתרון שאלה 4 (המשך)

פתרון שאלה 4 (המשך)

שאלה 5: הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: (7 נק' לסעיף)

א. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית. אזי, $B = A^2 - 6A + 11I$ היא לכסינה.

ב. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ לכסינה שכל הע"ע שלה אי-שליליים. אזי קיימת $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $B^2 = A$.

ג. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה שכל הע"ע שלה אי-שליליים. ותהי $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ המקיימת ש B^2 היא צורת הזורדן של A^2. אזי, B היא צורת הז'ורדן של A.

ד. יהי Vממ"פ מעל $\mathbb{C}$ ויהי U ת"מ שלו. יהיו $v_1, v_2 \in V$ בעלי אותו היטל על U. אזי, $v_1 - v_2 \in U^{\perp}$.

פתרון:

פתרון שאלה 5 (המשך)

פתרון שאלה 5 (המשך)

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___