

הצעת פתרון – מתמטיקה בדידה סמסטר קיץ מועד ב' התשפ"ו

עדי מכנס

1. (9 נקודות כל סעיף) תהינה A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הבאים:

א. אם $A \subseteq C \subseteq B$ אז $\mathcal{P}(A \triangle C) \cap \mathcal{P}(C \triangle B) = \{\emptyset\}$.

פתרון:

נוכיח את הטענה. נניח בשלילה שקיימת $X \in \mathcal{P}(A \triangle C) \cap \mathcal{P}(C \triangle B)$ כך ש $X \neq \emptyset$. כלומר אנחנו מקבלים כי:

$$X \in \mathcal{P}(A \triangle C) \Leftrightarrow X \subseteq A \triangle C$$

$$X \in \mathcal{P}(C \triangle B) \Leftrightarrow X \subseteq C \triangle B$$

כעת X לא ריקה, לכן קיים $a \in X$. מכאן נובע כי:

$$a \in A \triangle C$$

$$a \in C \triangle B$$

כעת נחלק למקרים.

אם $a \in A$, כיוון ש $A \subseteq C$ מתקיים כי $a \in C$, בסתירה לכך ש $a \in A \triangle C$ (כי הוא בשתי הקבוצות במקביל).

אחרת, $a \notin A$ ולכן בהכרח $a \in C$ (כי הרי נתון שהוא באיחוד הסימטרי). כיוון ש $C \subseteq B$ מתקיים כי $a \in B$, בסתירה לכך ש $a \in C \triangle B$ (מאותו טיעון כמו למעלה).

משל ■.

ב. אם $A \neq B$ אז $(A \times B) \neq (B \times A)$.

פתרון:

נפריך את הטענה. ניקח:

$$A = \emptyset$$

$$B = \{42\}$$

ברור כי

$$A \neq B$$

אבל:

$$A \times B = B \times A = \emptyset$$

הערה: אם $A, B \neq \emptyset$ אז הטענה נכונה.

ג. אם $A \cap B \neq \emptyset$ אז $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset$.

פתרון:

נוכיח את הטענה. כיוון ש $A \cap B \neq \emptyset$, קיים $a \in A \cap B$. לכן $(a, a) \in A \times B$ (כיוון ש $a \in A \wedge a \in B$) ובאופן דומה מתקיים $(a, a) \in B \times A$. סה"כ $(a, a) \in (A \times B) \cap (B \times A)$ וממילא $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset$.

משל ■.

2. (7 נקודות כל סעיף) פונקציה $f: A \rightarrow B$ תיקרא תת-חח"ע אם לכל $b \in B$ מתקיים שקבוצת המקורות של b , $f^{-1}[\{b\}]$ בעלת שני איברים לכל היותר (כלומר $|f^{-1}[\{b\}]| \leq 2$).

תהינה $f: A \rightarrow B$ ו $g: B \rightarrow C$ פונקציות. הוכיחו/הפריכו:

א. אם f, g שתיהן תת-חח"ע אז ההרכבה $g \circ f$ היא תת-חח"ע.

פתרון:

נפריך את הטענה.

נבחר:

$$f: \{0,1,2,3\} \rightarrow \{0,1\}$$

על ידי:

$$f(0) = f(1) = 0$$

$$f(2) = f(3) = 1$$

קל לראות כי:

$$|\{0,1\}| = |f^{-1}[\{0\}]| = |f^{-1}[\{1\}]| = |\{2,3\}| = 2 \leq 2$$

ולכן מתקיים כי f היא תת-חח"ע. כמו כן נגדיר:

$$g: \{0,1\} \rightarrow \{0\}$$

על ידי:

$$g(0) = g(1) = 0$$

גם פה ברור כי

$$|f^{-1}[\{0\}]| = |\{0,1\}| = 2$$

ולכן גם g היא תת-חח"ע, אבל:

$$g \circ f: \{0,1,2,3\} \rightarrow \{0\}$$

המקיימת:

$$(g \circ f)(0) = g(0) = 0$$

$$(g \circ f)(1) = g(0) = 0$$

$$(g \circ f)(2) = g(1) = 0$$

$$(g \circ f)(3) = g(1) = 0$$

ואז:

$$|(g \circ f)^{-1}[\{0\}]| = |\{0,1,2,3\}| = 4 > 2$$

ועל כן $g \circ f$ אינה תת-חח"ע.

ב. אם $g \circ f$ היא תת-חח"ע אז f היא תת-חח"ע.

פתרון:

נוכיח את הטענה. נב"ש כי f לא תת-חח"ע. לכן קיים $b \in B$ וכן קיימים [לפחות] $x, y, z \in A$ שונים כך ש:

$$f(x) = f(y) = f(z) = b$$

כעת, $g \circ f$ היא תת-חח"ע, ולכן:

$$|(g \circ f)^{-1}[\{g(b)\}]| \leq 2$$

אבל:

$$x, y, z \in (g \circ f)^{-1}[\{g(b)\}]$$

שכן:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(b)$$

$$(g \circ f)(y) = g(f(y)) = g(b)$$

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(b)$$

ואז:

$$\{x, y, z\} \subseteq (g \circ f)^{-1}[\{g(b)\}] \Rightarrow 3 \leq |(g \circ f)^{-1}[\{g(b)\}]|$$

בסתירה. משל ■.

3. (7 נקודות כל סעיף) תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. נגדיר יחס S על $\mathbb{R}$ כך:

$$x_1 S x_2 \Leftrightarrow |\{t \in \mathbb{R} \mid f(x_1) = f(t)\}| = |\{t \in \mathbb{R} \mid f(x_2) = f(t)\}|$$

א. הוכיחו כי S יחס שקילות על $\mathbb{R}$.

פתרון:

אפשר להוכיח ישירות, ואפשר לומר שזהו יחס של שוויון עוצמות שהוכחנו בהרצאה שהוא יחס שקילות.

ב. נניח כי f מוגדרת על ידי $f(x) = x^2$. מצאו את עוצמת קבוצת המנה, $\mathbb{R}/S$. קבעו האם העוצמה סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת.

פתרון:

יהי $x \in \mathbb{R}$, ננסה לחשב את $[x]_S$. כעת:

$$\{t \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(t)\} = \{t \in \mathbb{R} \mid x^2 = t^2\}$$

כמות הפתרונות (t הוא המשתנה) של המשוואה $x^2 = t^2$ הוא $t = \pm x$. כעת, אם $x \neq 0$ ישנם בדיוק שתי פתרונות למשוואה. אחרת, $x = 0$ והפתרון היחיד הוא $t = 0$. כלומר, לכל $x, y \neq 0$ כמות הפתרונות של המשוואה $x^2 = t^2$ שווה לכמות הפתרונות של המשוואה $y^2 = t^2$ והוא 2. רק עבור $x = 0$ יש רק פתרון אחד למשוואה. לכן נקבל בסה"כ:

$$[x]_S = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & x \neq 0 \\ \{0\} & x = 0 \end{cases}$$

ובסה"כ:

$$\mathbb{R}/_S = \{[0]_S, [67]_S\}$$

ולכן עוצמת קבוצת המנה היא סופית, והיא 2.

ג. הוכיחו/הפריכו: אם f הפיכה אז $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

פתרון:

נוכיח את הטענה. יהי $x \in \mathbb{R}$. כעת:

$$\{t \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(t)\} = \{x\}$$

כיוון ש f חח"ע (כי היא הפיכה). כלומר לכל x מתקיים:

$$|\{t \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(t)\}| = |\{x\}| = 1$$

ולכן ברור כי לכל x, y מתקיים כי:

$$|\{t \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(t)\}| = |\{t \in \mathbb{R} \mid f(y) = f(t)\}| = 1$$

ולכן לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $(x, y) \in S$ (ובעצם ש $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \subseteq S$)

מצד שני, מתקיים ש S יחס על $\mathbb{R}$ ולכן $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ וע"כ $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ וסיימנו. ■

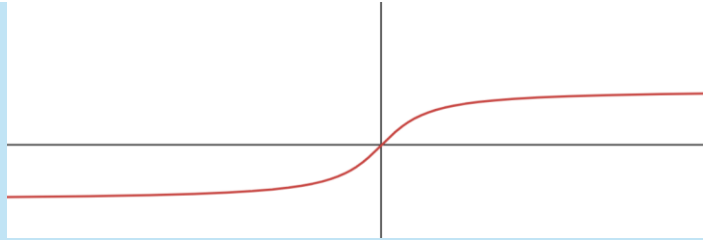
ד. הוכיחו/הפריכו: אם $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ אז f הפיכה.

פתרון:

נפריד את הטענה. מהסעיף הקודם אפשר לראות שאם ניקח $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ חח"ע ולא על נקבל את המבוקש (כי השתמשנו רק בתכונת החח"ע). לכן ניקח:

$$f(x) := \arctan(x)$$

(למי מכם שלא יודעים, $\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$ והיא נראית כך:



התמונה באדיבות desmos) היא חח"ע בגלל שהיא מוגדרת על ידי הפונקציה ההופכית של $\tan(x)$ המצומצמת ל $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, שהיא הפיכה. כפי שעשינו קודם לכן, אפשר לראות שלכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים כי:

$$1 = |\{x\}| = |\{t \in \mathbb{R} \mid \arctan(x) = \arctan(t)\}| = |\{t \in \mathbb{R} \mid \arctan(y) = \arctan(t)\}| = |\{y\}| = 1$$

ולכן $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ אבל כמובן ש f אינה הפיכה משום שאינה על.

4. תהא $\mathbb{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ קבוצה של תתי קבוצות של הטבעיים המקיימת כי היא שרשרת ביחס להכללה (היינו לכל A, B ב $\mathbb{X}$ מתקיים כי $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$). נגדיר יחס R על $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ על ידי הכלל

$$ARB \Leftrightarrow (\exists S \in \mathbb{X}: A \subseteq S \wedge B \subseteq \mathbb{N} \setminus S) \vee (A = B)$$

א. (6 נקודות) הוכיחו כי יחס סדר על $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$.

פתרון:

נוכיח ששלושת התכונות של יחס סדר מתקיימות ב R .

רלפקסיביות: ברור.

אנטי סימטריות: תהיינה $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ כך ש $ARB \wedge BRA$, וצ"ל $A = B$. נב"ש כי $A \neq B$. לכן קיים $x \in A$ כך ש $x \notin B$ (המקרה ההפוך יחסית דומה ולא נטרח לכתוב). כעת, קיימות קבוצות $S_1, S_2 \in \mathbb{X}$ כך ש:

$$A \subseteq S_1 \wedge B \subseteq \mathbb{N} \setminus S_1$$

$$B \subseteq S_2 \wedge A \subseteq \mathbb{N} \setminus S_2$$

ולכן $x \in S_1$. אנחנו יודעים ש $\mathbb{X}$ שרשרת, ולכן נחלק למקרים:

אם $S_1 \subseteq S_2$, זה אומר ש $x \in S_2$. כעת $A \subseteq \mathbb{N} \setminus S_2$, ולכן $x \in \mathbb{N} \setminus S_2$, בסתירה, שכן $x \in S_2$.

אחרת, $S_2 \subseteq S_1$, ולכן $B \subseteq S_1$. אבל $B \subseteq \mathbb{N} \setminus S_1$, ולכן כיוון ש B לא ריקה, קיים $y \in B$ כך שבו זמנית מתקיים כי $y \in S_1 \wedge y \in \mathbb{N} \setminus S_1$. בסתירה.

טרנזיטיביות: תהיינה $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ כך ש $ARB \wedge BRC$ וצ"ל ARC . נחלק למקרים. אם $A = B$ או $B = C$ הטענה ברורה. אחרת, קיימות קבוצות $S_1, S_2 \in \mathbb{X}$ כך ש:

$$A \subseteq S_1 \wedge B \subseteq \mathbb{N} \setminus S_1$$

$$B \subseteq S_2 \wedge C \subseteq \mathbb{N} \setminus S_2$$

וצריך למצוא קבוצה $S \in \mathbb{X}$ כך ש:

$$A \subseteq S \wedge C \subseteq \mathbb{N} \setminus S$$

מצד אחד, אנחנו יודעים כבר כי $A \subseteq S_1$, מצד שני אנחנו יודעים כי $C \subseteq \mathbb{N} \setminus S_2$. נטען כי $S_1 \subseteq S_2$, ואז נקבל כי:

$$A \subseteq S_1$$

וגם

$$C \subseteq \mathbb{N} \setminus S_2 \subseteq \mathbb{N} \setminus S_1$$

(בעצם, אני מסתמך על העובדה שאם $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$ אז $A^c \subseteq B^c$. לא אוכיח זאת כעת, נשאר כתרגיל לקוראים).
נב"ש ש $S_1 \not\subseteq S_2$. לכן $S_2 \subseteq S_1$. לכן:

$$B \subseteq S_2 \subseteq S_1$$

ואז כיוון ש B לא ריקה קיים $x \in B$ שמקיים גם $x \in S_1$, אך מנגד $B \subseteq \mathbb{N} \setminus S_1$ ולכן $x \notin S_1$ בסתירה.

משל ■.

ב. (6 נקודות כל סעיף) נניח $\mathbb{X} = \{ \{m \in \mathbb{N} \mid \exists k \leq n: m = 2k\} \mid n \in \mathbb{N} \}$

i . הוכיחו/הפריכו: קיים $\sup$ לקבוצה $\{ \{2n\} \mid n \in \mathbb{N} \}$.

פתרון:

נפריך את הטענה. תחילה ננסה להבין מי היא בכלל $\mathbb{X}$:

$$n = 1: \{m \in \mathbb{N} \mid \exists k \leq 1: m = 2k\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m = 2 \cdot 1\} = \{2\}$$

$$n = 2: \{m \in \mathbb{N} \mid \exists k \leq 2: m = 2k\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m = 2 \cdot 1 \vee m = 2 \cdot 2\} = \{2, 4\}$$

ובאופן כללי, $\mathbb{X}$ היא:

$$\mathbb{X} = \{\{2\}, \{2, 4\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 6, 8\}, \dots\}$$

כעת, הקבוצה הנתונה לנו היא:

$$\{\{2\}, \{4\}, \{6\}, \dots\}$$

כלומר יחידונים של כל המספרים הזוגיים.

הערה חשובה: אני מניח פה ש 0 אינו טבעי. לצורכנו זה לא ממש משנה, כפי שתראו בהמשך.

כעת, נניח בשלילה שקיים $\sup$ לקבוצה, נסמנו M . לכן, לכל יחידון $\{2n\}$ קיימת $S \in \mathbb{X}$ כך ש $\{2n\} \subseteq S$, וכמו כן מתקיים $M \subseteq \mathbb{N} \setminus S$. כעת:

הבחנה 1: קבוצה היא חסם מלעיל אמ"מ היא לא מכילה אף מספר זוגי.

הוכחה: בכיוון $\Leftarrow$, נניח בשלילה שקיים חסם מלעיל לקבוצה נסמנו ב O וכן מספר $k \in \mathbb{N}$ כך ש $2k \in O$. כעת, מתקיים עבור $\{2k\}$ כי $\{2k\} R O$. על כן, קיימת קבוצה $S \in \mathbb{X}$ כך ש $\{2k\} \subseteq S$ (כלומר $2k \in S$) וגם $O \subseteq \mathbb{N} \setminus S$ – ומכאן נקבל כי $2k \notin S$, בסתירה.

בכיוון $\Rightarrow$, תהא A קבוצה ללא אף מספר זוגי. יהי $\{2n\}$ יחידון בקבוצה שלנו, ונוכיח כי $\{2n\} R A$. אכן, אם ניקח:

$$S = \{2, \dots, 2n\}$$

נקבל כי $\{2n\} \subseteq S$, וכן $A \subseteq \mathbb{N} \setminus S$, שכן נב"ש שקיים $x \in A$ אך $x \notin \mathbb{N} \setminus S$, לכן $x \in S$. מצד אחד $x \in A$ ולכן x אי זוגי, ומצד שני $x \in S$ ולכן x זוגי (ע"פ הגדרת S שלנו) – בסתירה.
משל הבחנה ראשונה. ■

הבחנה 2: אם $A \neq B$ לא ריקות וגם A, B לא מכילות אף מספר זוגי, לא מתקיים כי ARB וגם לא מתקיים כי BRA .

הוכחה: כל קבוצה ב $\mathbb{X}$ מכילה אך ורק מספרים זוגיים, ולכן לא קיימת קבוצה $S \in \mathbb{X}$ כך ש $A \subseteq S$ וגם $B \subseteq S$ וממילא החלק השמאלי של הפסוק השמאלי בהגדרה לא מתקיימים.
משל הבחנה שנייה. ■

בעצם, הוכחנו שבקבוצת כל חסמי המלעיל שלנו אף אחד לא מתייחס לשונה ממנו (פרט לעצמו כמובן) ולכן ברור שאין חסם מלעיל אשר קטן מכל השאר. היה אפשר לסיים בזה, אבל כבר הנחנו הנחת שלילה אז נחזור אליה.
אם M היא קבוצת כל המספרים האי זוגיים, ברור כי בעצמה חסם מלעיל (מהבחנה 1) אך לא מתקיים כי $MR\{1\}$ (מהבחנה 2), אך $\{1\}$ חסם מלעיל (מהבחנה 1) ולכן סתירה. אחרת, M לא מכילה מספר כלשהו מהצורה $2k + 1$. נגדיר $M' = M \cup \{2k + 1\}$. גם M וגם M' לא מכילות מספרים זוגיים ולכן חסמי מלעיל (מהבחנה 1) אך לא מתקיים כי MRM' (מהבחנה 2) ולכן סתירה.

ii. נסמן ב- $\mathbb{M}$ את קבוצת חסמי המלרע (החסמים מלמטה) של הקבוצה $\{\{3\}, \{3,5\}\}$. מצאו את העוצמה של $\mathbb{M}$.
קבעו האם העוצמה $|\mathbb{M}|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת.

פתרון:

תחילה ננסה להבין מי חסם מלרע. אז קבוצה לא ריקה X היא חסם מלרע אם $XR\{3\} \wedge XR\{3,5\}$. כלומר:

$$\exists S \in \mathbb{X}: X \subseteq S \wedge \{3\} \subseteq \mathbb{N} \setminus S$$

$$\exists S \in \mathbb{X}: X \subseteq S \wedge \{3,5\} \subseteq \mathbb{N} \setminus S$$

בעצם, בגלל ש S מכילה מספרים זוגיים, ברור כי לא קיימת $S \in \mathbb{X}$ כך ש $3,5 \in S$. בנוסף, אפשר לראות שלא מתקיים כי $\{3\}R\{3,5\}$ או $\{3,5\}R\{3\}$ ולכן לא נתייחס אליהם.

נשים לב כי S היא תמיד קבוצה סופית (כל קבוצה בשרשרת היא סופית), ולכן גם X היא קבוצה סופית. ספציפית, אפשר לראות כי:

$$\mathbb{M} = \left\{ X \subseteq \mathbb{N} \mid \begin{array}{l} X \text{ סופית} \\ \forall n \in X: n \text{ זוגי} \end{array} \right\}$$

נוכיח זאת פורמלית. בכיוון $\subseteq$ תהי X חסם מלרע. לכן קיימת S ב $X \subseteq S$ ש X סופית ולכן גם S . באופן דומה, נב"ש שקיים $n \in X$ אי זוגי, לכן $n \in S$ אבל S מכילה רק זוגיים, בסתירה.

בכיוון $\supseteq$ תהי X קבוצה סופית שכל איבריה זוגיים, נוכיח שהיא חסם מלעיל. נסמן ב $2k = \max X$, כאשר המקסימום מוגדר על ידי היחס הרגיל " $\leq$ " על הטבעיים. קיים כזה בגלל ש X סופית. לכן נבחר $S = \{2, \dots, 2k\}$ ואכן $X \subseteq S$ שכן לכל $x \in X$ מתקיים כי $x \leq 2k$ וגם x זוגי ולכן $x \in S$. כמו כן ברור כי $\{3\} \subseteq \mathbb{N} \setminus S$ וכן $\{3,5\} \subseteq \mathbb{N} \setminus S$ שכן $3,5 \notin S$ כי S מכילה רק זוגיים ולקבל לבסוף $XR\{3\}, XR\{3,5\}$.

סה"כ נותר למצוא את העוצמה של $\mathbb{M}$. נבחין כי:

$$\mathbb{M} \subseteq \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ סופית}\}$$

בשיעורי הבית הוכחתם כי עוצמת הקבוצה הזו [הימנית] היא $\aleph_0$. אפשר גם להוכיח זאת מפורשות: אנחנו יודעים שלכל מספר טבעי יש ייצוג בינארי יחיד. כלומר, לכל מספר טבעי n קיימים $x_1, \dots, x_d$ יחידים כך ש $n = \sum_{i=1}^d 2^{x_i}$. לכן, נגדיר פונקציה:

$$f: \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ סופית}\} \rightarrow \mathbb{N}$$

על ידי: לכל X תת קבוצה סופית של הטבעיים

$$f(X) = \sum_{x \in X} 2^x$$

זוהי פונקציה חח"ע ועל, משום שכאמור לכל מספר טבעי n קיים (פונקציה על) ייצוג בינארי יחיד (חח"ע). דרך נוספת, אפשר להבחין שקבוצת כל הקבוצות הסופיות הוא איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה כך:

$$F_n = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid |X| \leq n\}$$

ואז:

$$\{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ סופית}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$$

וברור ש F_n היא קבוצה בת מנייה (העוצמה שלה היא $\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdots \aleph_0 = \aleph_0$ כך n פעמים).

על כן, נקבל כי $|\mathbb{M}| \leq |\{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ סופית}\}| = \aleph_0$.

באופן דומה, אפשר לקחת פונקציה חח"ע:

$$f: \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{M}$$

על ידי:

$$f(2n) = \{2n\}$$

זוהי פונקציה חח"ע (קל לראות) ולכן $|\mathbb{M}| \geq |\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}| = \aleph_0$.

דרך נוספת: אפשר להגיד ש $\mathbb{M}$ אינסופית והרי $\aleph_0$ קטן או שווה לכל עוצמה אינסופית, ולכן $\aleph_0 \leq |\mathbb{M}|$.

סה"כ מקש"ב נקבל כי $|\mathbb{M}| = \aleph_0$.

5. תהא A קבוצה. יחס S על A יקרא אנטי-טרנזיטיבי אם

$$\forall a, b, c \in A: [aSb \wedge bSc] \Rightarrow \neg(aSc)$$

נסמן ב $\mathbb{K}$ את קבוצת כל היחסים על A שהם אנטי-טרנזיטיביים. נתבונן ב $\mathbb{K}$ עם יחס ההכלה.

א. (5 נקודות) הוכיחו: לכל $S \in \mathbb{K}$ מתקיים כי $S \cap I = \emptyset$. כאשר I הוא יחס הזהות על A .

פתרון:

נב"ש כי $S \cap I \neq \emptyset$. לכן קיים זוג $(x, y) \in A \times A$ כך ש $(x, y) \in S \wedge (x, y) \in I$. כיוון שכך, מתקיים כי $x = y$.
על כן, נקבל כי:

$$xSx$$

וגם

$$xSx$$

ולכן גם

$$xSx$$

בסתירה לאנטי-טרנזיטיביות של S .

(הערה: בעצם לקחנו את $a = b = c = x$ מההגדרה של אנטי-טרנזיטיביות)

ב. (5 נקודות) הוכיחו שקיים יחס $S \in \mathbb{K}$ שהוא מקסימאלי.

פתרון:

ישנן שתי דרכים לפתור את השאלה, נתחיל בדרך ה"האוסדורפית":

נבחין כי $\mathbb{K} \neq \emptyset$ מכיוון ש $\emptyset \in \mathbb{K}$ (היחס הריק הוא אנטי-טרנזיטיבי באופן ריק). על כן, הקבוצה $\{\emptyset\}$ היא שרשרת, ועל כן מהאוסדורף, קיימת שרשרת מקסימלית M של קבוצות אנטי-טרנזיטיביות כך ש $\{\emptyset\} \subseteq M$. נסמן:

$$S := \bigcup_{X \in M} X$$

נוכיח כי S יחס אנטי-טרנזיטיבי מקסימלי.

אנטי-טרנזיטיביות: נניח בשלילה שקיימים $a, b, c \in A$ כך ש $aSb \wedge bSc \wedge aSc$. לכן, קיימות קבוצות X_1, X_2, X_3 ב M כך ש $aX_1b \wedge bX_2c \wedge aX_3c$.

כזכור, M שרשרת. נניח בלי הגבלת הכלליות כי $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3$. שאר המקרים האחרים די דומים. לכן, aX_3b וכן bX_3c , אבל גם aX_3c – בסתירה לכך ש X_3 אנטי-טרנזיטיבית.

מקסימליות: נניח בשלילה ש S אינה מקסימלית. אם A ריקה, אז זה אומר ש $S = \emptyset$ ולכן S בעצמה מקסימלית בסתירה.

אחרת, קיים יחס B (לא ריק!) כך ש $S \cup B$ אנטי-טרנזיטיבי וגם $S \subset S \cup B$. לכן נגדיר:

$$M' = M \cup \{S \cup B\}$$

ברור כי זוהי שרשרת של יחסים אנטי-טרנזיטיביים, וכן $M \subseteq M'$, אך $S \cup B \notin M$ (נב"ש כי $S \cup B \in M$, לכן מתקיים כי $S \cup B \subseteq S$, ולכן $B \subseteq S$ מה שאומר כי $S \cup B = S$ בסתירה) ובסה"כ בסתירה למקסימליות של M .

משל ■.

כעת אציג דרך קונסטרוקטיבית (כלומר: בונים ישירות את S).

אם A ריקה אז $\emptyset := S$ מקיים את כל הדרישות.

אחרת, קיים $a \in A$. נגדיר:

$$S := (\{a\} \times (A \setminus \{a\})) \cup ((A \setminus \{a\}) \times \{a\})$$

נוכיח כי S אנטי-טרנזיטיבי:

נב"ש כי S אינו אנטי-טרנזיטיבי. לכן קיימים $x, y, z \in S$ כך ש $xSy \wedge ySz \wedge xSz$. נחלק למקרים:

אם $x = a$, אזי $y \neq a$ (הזוג (x, y) הגיע מצד שמאל). באופן דומה נקבל כי $z = a$ (הזוג (y, z) הגיע מצד ימין).
לכן $x = z$ כלומר $(a, a) \in S$, בסתירה (ודאו זאת בבית)!

אחרת, $x \neq a$. אזי $y = a$ (הזוג (x, y) הגיע מצד ימין). באופן דומה נקבל כי $z \neq a$ (הזוג (y, z) הגיע מצד שמאל). לכן $x, z \neq a$ כלומר $(x, z) \in S$, בסתירה (גם את זה כדאי לוודא בבית)!

נוכיח מקסימליות. יהי $O \in \mathbb{K}$ יחס אנטי-טרנזיטיבי כך ש $S \subseteq O$. נב"ש כי $S \neq O$, לכן קיימים $(x, y) \in O$ כך ש $(x, y) \notin S$. נחלק למקרים:

אם $x = a$, אזי $y = a$ (אחרת $(x, y) \in S$), מכאן $(a, a) \in O \cap I$ בסתירה לסעיף א'!

אחרת, $x \neq a$. לכן בהכרח $y \neq a$ (אחרת $(x, y) \in S$). לכן נקבל כי xSa וכן aSy . כעת, כיוון ש $S \subseteq O$ נקבל למעשה כי $xOa \wedge aOy$, אבל התחלנו עם xOy , בסתירה לכך ש O אנטי-טרנזיטיבי.

משל ■.

ג. (5 נקודות לכל תת-סעיף) נניח כעת ש $A = \mathbb{R}$.

i . יהא יחס $S \in \mathbb{K}$ מקסימאלי. הוכיחו: $|S| = \aleph$.

פתרון:

נפתח בטענת עזר:

טענת עזר. יהי $S \in \mathbb{K}$ יחס אנטי-טרנזיטיבי מקסימלי. אזי לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $y \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$xSy \vee ySx$$

הוכחה. תחילה נתחיל בקיום. אם קיים y כך ש xSy , סיימנו.

אחרת מתקיים שלכל y מתקיים כי $(x, y) \notin S$. כעת נב"ש שלכל $y \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $(y, x) \notin S$.

נגדיר:

$$S' = S \cup \{(x, 17)\}$$

נוכיח כי S' אנטי טרנזיטיבי: נב"ש שקיימים $a, b, c \in \mathbb{R}$ כך ש $aS'b \wedge bS'c \wedge aS'c$. ברור כי $b, c \neq x$. נחלק למקרים:

- אם $a = x$, אז ברור כי $b = 17$. בנוסף לא ייתכן כי $b = c$, אחרת סתירה לסעיף א'. לכן קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש xSc , בסתירה להנחה שלנו.

- אחרת $a \neq x$, לכן $(a, b) \in S$ וכמו כן $(b, c) \in S$. ברור כי $(a, c) \neq (x, 17)$. ועל כן $(a, c) \in S$, בסתירה לכך ש S אנטי-טרנזיטיבי.

סה"כ, S' הוא אנטי-טרנזיטיבי אבל $S \subset S'$, בסתירה למקסימליות של S . משל טענת עזר. ■

כעת ניגש להוכיח שהעוצמה של S היא $\aleph$. מצד אחד:

$$S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

ולכן:

$$|S| \leq \aleph \cdot \aleph = \aleph$$

מצד שני, נגדיר פונקציה:

$$f: S \times \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

על ידי:

$$f((a, b), 1) = a$$

$$f((a, b), 2) = b$$

למעשה, הוכחנו בטענת העזר ש f היא פונקציה על. לכן מאקסיומת הבחירה קיימת פונקציה חח"ע:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow S \times \{1, 2\}$$

ולכן:

$$\aleph = |\mathbb{R}| \leq |S \times \{1, 2\}| = 2 \cdot |S| = |S|$$

משום ש S אינסופית (כיוון שעבור כל מספר ממשי יש מישהו ב S). סה"כ מקש"ב נקבל כי $|S| = \aleph$. משל ■.

ii. מצאו את עוצמת $\mathbb{K}$. קבעו האם העוצמה $|\mathbb{K}|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת.

פתרון:

מצד אחד, $\mathbb{K} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ (זכרו כי יחס הוא תת קבוצה של $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. לכן קבוצה של יחסים הוא תת קבוצה של קבוצות) ולכן:

$$|\mathbb{K}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})| = 2^{|\mathbb{R} \times \mathbb{R}|} = 2^{\aleph}$$

מצד שני, נגדיר פונקציה:

$$f: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset, \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{K}$$

על ידי: לכל תת קבוצה לא טרוויאלית של הממשיים A :

$$f(A) = A \times (\mathbb{R} \setminus A)$$

(שימו לב שזה מאוד דומה למה שעשינו בסעיף ב', אבל כאן אנחנו לא דורשים מקסימליות) נוכיח כי f מוגדרת היטב ע"י כך שנראה כי לכל תת קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ (אפילו טרוויאלית) מתקיים כי $A \times (\mathbb{R} \setminus A)$ הוא יחס אנטי-טרנזיטיבי. נניח בשלילה שלא, ולכן קיימים $a, b, c \in \mathbb{R}$ כך ש $(a, b), (b, c), (a, c) \in A \times (\mathbb{R} \setminus A)$. לכן, מתקיים כי

$$a \in A, b \in A$$

וכמו כן:

$$b \notin A, c \notin A$$

בסתירה. על כן, לכל A היחס $(\mathbb{R} \setminus A) \times A$ הוא אכן יחס ב $\mathbb{K}$.

נוכיח חח"ע. תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ לא טריוויאליות כך ש $f(A) = f(B)$ ונוכיח כי $A = B$. נוכיח הכלה בכיוון $\subseteq$ שכן הכיוון השני יחסית דומה. יהי $x \in A$. כעת $\mathbb{R} \setminus A$ אינה ריקה (כי $A \neq \mathbb{R}$) ולכן קיים $y \in \mathbb{R} \setminus A$. על כן, מתקיים כי:

$$(x, y) \in A \times (\mathbb{R} \setminus A)$$

אבל מתקיים כי $A \times (\mathbb{R} \setminus A) = B \times (\mathbb{R} \setminus B)$, ובפרט $(x, y) \in B \times (\mathbb{R} \setminus B)$ מה שאומר כי $x \in B$.

סה"כ, קיבלנו כי:

$$2^{\aleph} = |\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset, \mathbb{R}\}| \leq |\mathbb{K}|$$

ובסה"כ לפי קש"ב נקבל כי $|\mathbb{K}| = 2^{\aleph}$.