חדו"א 2 לאודיסאה – 86-148 – פתרון בוחן - 04.05.23

1. (37 נק') לכל אחד מן הטורים הבאים קבעו אם הוא מתכנס בהחלט, בתנאי או מתבדר:

א.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}$$

$$\left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון הטור שלנו מתכנס בהחלט.

ב.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$$

ראשית נבדוק התכנסות בהחלט

$$\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right| = \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \ge \frac{\sqrt{n}}{n+n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון הטור אינו מתכנס בהחלט (היה ניתן להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי ביתר קלות).

כעת נוכיח כי הסדרה $\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ שואפת לאפס באופן מונוטוני, ולכן לפי מבחן לייבניץ הטור כולו מתכנס.

ביחד, נקבל את התשובה הסופית כי הטור מתכנס בתנאי.

$$\lim\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = \lim\frac{\sqrt{n}}{n}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{2}{n}} = \lim\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{2}{n}} = 0$$

נראה כי הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ יורדת בתחום $x \ge 1$ ולכן בפרט לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $f(n+1) \le f(n)$ כפי שרצינו.

$$f'(x) = \frac{\frac{x+2}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}}{(x+2)^2} = \frac{x+2-2(x+1)}{2\sqrt{x+1}\,(x+2)^2} = \frac{-x-1}{2\sqrt{x+1}\,(x+2)^2}$$

ואכן מתקיים כי הנגזרת שלילית בתחום הרצוי (ואפילו יותר).

2. (37 נק') קבעו לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ הטורים הבאים מתכנסים:

א.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$$

נפעיל את מבחן השורש

$$\lim \sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n}\right|} = \lim \frac{|a|}{\sqrt[n]{n}} = |a|$$

לכן אם $|a| < 1$ הטור מתכנס בהחלט, ואם $|a| > 1$ הטור מתבדר.

נותר לבדוק מה קורה כאשר $a = \pm 1$

עבור $a = 1$ נקבל את הטור ההרמוני המתבדר, ועבור $a = -1$ נקבל כי הטור מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

סה"כ הטור מתכנס אם ורק אם $a \in [-1,1)$

ב.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a^n$$

באופן דומה נפעיל את מבחן השורש ונקבל

$$\lim \sqrt[n]{|na^n|} = \lim \sqrt[n]{n} \cdot |a| = |a|$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט לכל $|a| < 1$ ומתבדר לכל $|a| > 1$.

עבור $|a| = 1$ נקבל כי

$$\lim |na^n| = \infty \neq 0$$

ולכן הטור מתבדר.

סה"כ הטור מתכנס אם ורק אם $a \in (-1,1)$

3. (37 נק') יהי טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

הוכחה:

כיוון שהטור חיובי, מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_n \geq 0$

ביחד עם הנתון הנוסף, $a_n \neq 0$ שהרי המכנה לא יכול להתאפס.

לכן $a_1 > 0$.

מהנתון, הסדרה מונוטונית עולה (חיובית ומנה גדולה שווה לאחד), ולכן גבול הסדרה אם קיים חייב להיות גדול או שווה לa_1.

סה"כ a_n אינה שואפת לאפס, ולכן הטור מתבדר.

ב. אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

הפרכה:

ניקח את הסדרה הקבועה $a_n = 1$ המקיימת את הנתונים, ואילו אינה שואפת לאפס ולכן הטור מתבדר.