

בדידה (88195), סמטסטר קיץ תשפ"ה, בוחן

4.8.2025, י' באב התשפ"ה

מרצים: אחיה בר-און, אריאל ויצמן, דן פלורנטיין, ארז שיינר.
מתרגלים: יחזקאל אימרה רגב, נמרוד נדבורני, שירה ידעי, הראל רוזנפלד, עידו פלדמן, בוריס גוליקוב, אביתר ישראל שויקה.
אורך המבחן: שעתיים.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על כל השאלות. ישנן 2 שאלות בבוחן. כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- נמקו תשובתכם.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטייטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. נגדיר $A_1 = \{1\}$, $B_1 = \{2\}$. עוד נגדיר, לכל n טבעי, את הקבוצות

$$A_{n+1} = B_n \cup \{x + 2^n \mid x \in A_n\}$$

$$B_{n+1} = A_n \cup \{x + 2^n \mid x \in B_n\}$$

(א) (10 נקודות) כתבו מפורשות את הקבוצות A_2, B_2 .

(ב) (20 נקודות) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים כי

$$A_n \cup B_n = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2^n\}$$

(ג) (20 נקודות) הוכיחו כי מתקיים

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}.$$

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____

2. (20 נקודות כל סעיף) נסמן $S = \{1, 2, \dots, 100\}$ ונגדיר יחס R על

$$P(S \times S)$$

כך: לכל $A, B \subseteq S \times S$ מתקיים ARB אם ורק אם

$$[\forall (x, y) \in A \exists s \in S : (x, s) \in B] \wedge [\forall (x, y) \in B \exists s \in S : (x, s) \in A]$$

הוכיחו:

(א) R הוא יחס שקילות על $P(S \times S)$.

(ב) הוכיחו: לכל שני יחסי סדר (חלקי) T_1, T_2 על הקבוצה S מתקיים כי $[T_1]_R = [T_2]_R$.

(ג) מצאו את גודל קבוצת המנה. כלומר, מצאו כמה איברים (שווים) יש בקבוצה $P(S \times S)/R$.

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____

דף נוסף לשאלה מספר ____