

קורס: 83-211-01
מרצה: ש. הורוביץ
ט' שבט תשס"ט

מבחן בפונקציות מרוכבות מועד א

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.
משך הבחינה שעתיים.

1. נגדיר $f(z) = e^z \sin z \cos z$. מצאו את כל האפסים של $f(z)$ ב- \mathbb{C} וקבעו את הסדר של כל אפס. הצדיקו את תשובתכם.

2. נניח ש- $f(z)$ אנליטית בעיגול $|z| < R$. הוכיחו שגם הפונקציה $\bar{f}(\bar{z})$ אנליטית שם.
הדרכה: אם $f = u + iv$ אז $\bar{f}(\bar{z}) = u(x, -y) - iv(x, -y)$. תחילה הסבירו שוויון זה ואז הסתמכו עליו.

3. חשבו: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 4x}{(x^2 + 9)^2} dx$

4. חשבו $\int_{\gamma} z \sin x dz$ כאשר $x = \operatorname{Re} z$ ו- γ מסילה מורכבת משלושה קטעים ישרים:
מ- i ל- 0 , מ- 0 ל- 1 ומ- 1 ל- $1+i$.

5. מצאו טור לורן סביב 0 לפונקציה $f(z) = z^3 e^{1/z^2} - \frac{\sin 2z}{z}$ וחשבו $\operatorname{Res}(f, 0)$.

6. כמה אפסים, כולל ריבוי, יש לפונקציה $z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z$ בעיגול היחידה $|z| < 1$?
הצדיקו את תשובתכם.

בהצלחה!