דוגמא א':

קבע **במרחב** את המצב ההדדי של הישרים:

$\ell_1:\ \underline{x} = (0,1,2)+t(3,-1,1)$ $\quad$ $\ell_2:\ \underline{x} = (-6,3,0)+s(-6,2,-2)$.

פתרון:

נשווה את ההצגות הפרמטריות: $(0,1,2)+t(3,-1,1) = (-6,3,0)+s(-6,2,-2)$.

המשוואות המתקבלות הן: $\mathbf{(1)}$ $3t = -6-6s$, $\mathbf{(2)}$ $1-t = 3+2s$, $\mathbf{(3)}$ $2+t = -2s$.

נחלץ את t ממשוואה (3) ונקבל $t = -2-2s$. הצבת תוצאה זו במשוואה (2) נותנת $1+2+2s = 3+2s$, כלומר $0 = 0$ וזה תמיד נכון. הצבת אותה התוצאה במשוואה (1) נותנת $3(-2-2s) = -6-6s$, כלומר $0 = 0$. לכן יש למערכת **אינסוף** פתרונות והיא מתקיימת לכל t ו-s, מכאן שהישרים **מתלכדים**. (אפשר להגיע לאותה מסקנה עפ"י ההערה שבעמ' זה. ראה דוגמא ד' בעמ' הבא).

דוגמא ד':

נתונים הישרים: $\ell_1:\ \underline{x} = (2,1,0)+t(1,-1,3)$, $\quad$ $\ell_2:\ \underline{x} = (1,0,-1)+s(-2,2,-6)$

א. הוכח שהם מקבילים זה לזה.

ב. מצא הצגה פרמטרית של **המישור הנקבע ע"י שני הישרים המקבילים** הנ"ל.

פתרון:

א. **דרך א'** –

המשוואות המתקבלות הן: $\mathbf{(1)}$ $2+t = 1-2s$, $\mathbf{(2)}$ $1-t = 2s$, $\mathbf{(3)}$ $3t = -1-6s$.

אם נחלץ את t ממשוואה (1) נקבל $t = -1-2s$. הצבת תוצאה זו במשוואה (2) נותנת $1+1+2s = 2s$, כלומר $2 = 0$ וזה לא ייתכן. לכן **אין פתרון** למערכת והישרים **מקבילים או מצטלבים**. נותר לבדוק את וקטורי הכיוון, שהם $\underline{u}_1 = (1,-1,3)$ ו-$\underline{u}_2 = (-2,2,-6)$.

קל לראות שמתקיים $\underline{u}_2 = -2\underline{u}_1$ ולכן הישרים **מקבילים**.

דרך ב' – וקטורי הכיוון, כפי שראינו, מקיימים $\underline{u}_2 = -2\underline{u}_1$ ולכן הישרים **מתלכדים** או **מקבילים**. נסתמך על ההערה שבעמ' 486. נקבל: $\underline{a}_1-\underline{a}_2 = (2,1,0)-(1,0,-1) = (1,1,1)$.

קל לראות **שלא** קיים m עבורו $(1,1,1) = m(1,-1,3)$, ז"א לא קיים m עבורו $\underline{a}_1-\underline{a}_2 = m\underline{u}_1$ ולכן הישרים **מקבילים**.

ב. ראינו בעמ' 327 שאחת הדרכים לקביעת מישור היא ע"י **שני ישרים מקבילים**. נראה עכשיו כיצד למצוא הצגה פרמטרית שלו. המישור המבוקש נקבע ע"י אחד מהישרים, למשל ℓ_1 וע"י וקטור המחבר את שני הישרים, למשל הווקטור $\underline{a}_1-\underline{a}_2 = (1,1,1)$.

לכן הצגה פרמטרית של המישור היא: $\underline{x} = (2,1,0)+m(1,-1,3)+n(1,1,1)$.

המצב ההדדי של ישר ומישור כאשר נתונה הצגה פרמטרית של המישור

נראה עכשיו כיצד לקבוע את מצבם ההדדי של ישר ומישור כאשר המישור נתון ע״י הצגה פרמטרית. נניח שהצגה פרמטרית של המישור היא $\pi: \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}} + \mathbf{t}\underline{\mathbf{u}} + \mathbf{s}\underline{\mathbf{v}}$ והצגה פרמטרית של הישר היא: $\ell: \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}} + \mathbf{r}\underline{\mathbf{w}}$. **נשווה** את ההצגות הפרמטריות של המישור והישר, כלומר $\underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v} = \underline{b} + r\underline{w}$. מתקבלות **שלוש משוואות** עם **שלושת הנעלמים** t, s ו-r. **המקרים הבאים** מאפיינים את המצב ההדדי:

א) אם לשלוש המשוואות יש פתרון יחיד – הישר חותך את המישור בנקודה אחת.
ב) אם לשלוש המשוואות אין פתרון – הישר מקביל למישור.
ג) אם לשלוש המשוואות יש אינסוף פתרונות – הישר מוכל במישור.

דוגמא א׳:

קבע את המצב ההדדי של המישור $\pi: \underline{x} = (-1,0,-4) + t(2,2,0) + s(0,1,-1)$ והישר $\ell: \underline{x} = (2,2,3) + r(1,4,0)$.

פתרון:

נשווה את ההצגות הפרמטריות: $(-1,0,-4) + t(2,2,0) + s(0,1,-1) = (2,2,3) + r(1,4,0)$.
המשוואות המתקבלות הן: $(1)\ -1+2t = 2+r$, $(2)\ 2t+s = 2+4r$, $(3)\ -4-s = 3$.
לפנינו מערכת רגילה של **שלוש משוואות עם שלושה נעלמים** t, s ו-r. אחת הדרכים לפתור מערכת כזאת היא לחלץ את אחד הנעלמים מאחת המשוואות ולהציב את התוצאה בשתי האחרות. בצורה כזאת מקבלים מערכת רגילה של שתי משוואות עם שני נעלמים. כאן ממשוואה (3) נקבל $s = -7$. הצבת תוצאה זו במשוואה (2) נותנת את המשוואה $(4)\ 2t-4r = 9$. הפתרון של משוואות (1) ו-(4) הוא $t = \frac{1}{2}$ ו-$r = -2$. כלומר, יש **פתרון יחיד** ולכן הישר **חותך** את המישור. כדי למצוא את **נקודת החיתוך** נציב $\mathbf{t = \frac{1}{2}}$ ו-$\mathbf{s = -7}$ בהצגה של **המישור** או $\mathbf{r = -2}$ בהצגה של **הישר**. הנקודה המתקבלת היא $(0,-6,3)$ וזאת נקודת החיתוך של הישר והמישור.

דוגמא ב׳:

קבע את המצב ההדדי של המישור $\underline{x} = (1,0,0) + t(1,-2,0) + s(2,-1,1)$ והישר $\underline{x} = (0,-1,-1) + r(1,1,1)$.

פתרון:

נשווה את ההצגות הפרמטריות: $(1,0,0) + t(1,-2,0) + s(2,-1,1) = (0,-1,-1) + r(1,1,1)$.
המשוואות המתקבלות הן: $(1)\ 1+t+2s = r$, $(2)\ -2t-s = -1+r$, $(3)\ s = -1+r$.
ע״י חילוץ s ממשוואה (3) והצבת התוצאה במשוואות (1) ו-(2) נקבל את המשוואות $t+r = 1$ ו-$2t+2r = 2$. קל לראות שמשוואות אלה **מתלכדות** למשוואה אחת ולכן יש להן **אינסוף פתרונות**. מכאן שגם לשלוש המשוואות יש אינסוף פתרונות. למשל, אם $t = 1$ אז $r = 0$ ו-$s = -1$ ואם $t = 0$ אז $r = 1$ ו-$s = 0$ וכו׳. בסה״כ קיבלנו שהישר **מוכל במישור**.

דוגמא ג׳:

קבע את המצב ההדדי של המישור $\underline{x} = (0,-1,3) + t(2,0,-3) + s(1,-1,1)$ והישר $\underline{x} = (1,1,1) + r(0,-2,5)$.

פתרון:

נשווה את ההצגות הפרמטריות: $(1,1,1)+r(0,-2,5) = (0,-1,3)+t(2,0,-3)+s(1,-1,1)$.

המשוואות המתקבלות הן: **(1)** $2t+s = 1$, **(2)** $-1-s = 1-2r$, **(3)** $3-3t+s = 1+5r$.

אם נחלץ את s ממשוואה (1) נקבל $s = 1-2t$. ע"י הצבת התוצאה במשוואות (2) ו-(3)

נקבל את המשוואות $2t+2r = 3$ ו-$5t+5r = 3$. קל לראות שלמשוואות אלה **אין פתרון**,

מכאן שהישר **מקביל למישור**.

דוגמא ד':

נתונים הישרים: ℓ_1: $\underline{x} = (2,1,0)+t(-1,-1,2)$, ℓ_2: $\underline{x} = (1,0,1)+s(1,0,-2)$.

א. הראה שהם מצטלבים.

ב. מצא הצגה פרמטרית של **המישור** העובר **דרך** הישר ℓ_1 **והמקביל** לישר ℓ_2.

דוגמא ה':

נתון המישור $\pi: x+3y+z-1 = 0$ והישרים:

ℓ_1: $\underline{x} = (2,0,-1)+t(0,-1,3)$, ℓ_2: $\underline{x} = (3,1,0)+s(1,0,-1)$, ℓ_3: $\underline{x} = r(1,1,-1)$.

א. הראה שהישר ℓ_1 מוכל במישור π.

ב. הראה שהישר ℓ_2 מקביל למישור π.

ג. הראה שהישר ℓ_3 חותך את המישור π.

פתרון:

א. אם (x,y,z) היא נקודה על הישר ℓ_1 אז $(x,y,z) = (2,0,-1)+t(0,-1,3)$.

המשוואות המתקבלות הן: **(1)** $x = 2$, **(2)** $y = -t$, **(3)** $z = -1+3t$. אם הנקודה

(x,y,z) הנ"ל נמצאת במישור π הנ"ל אז צריך להתקיים: $x+3y+z-1 = 0$. נציב

את התוצאות (1), (2) ו-(3) שקיבלנו עבור x, y ו-z ונקבל: $2+3(-t)+(-1+3t)-1 = 0$.

אם ננסה לפתור משוואה זו ולמצוא את הנעלם t נקבל $0 = 0$. כלומר, למשוואה יש

אינסוף פתרונות ולכן **הישר** ℓ_1 **מוכל במישור**. אפשר לומר שלכל ערך של t כל נקודה

של הישר נמצאת במישור.

ב. אם $(x,y,z) = (3,1,0)+s(1,0,-1)$ אז המשוואות הן:

(1) $x = 3+s$, **(2)** $y = 1$, **(3)** $z = -s$. כמו קודם, אם הנקודה (x,y,z) במישור

π אז צריך להתקיים: $(3+s)+3\cdot 1+(-s)-1 = 0$. אם ננסה לפתור משוואה זו ולמצוא

את הנעלם s נקבל $5 = 0$ וזה לא ייתכן, כלומר **אין פתרון למשוואה** ולכן **הישר** ℓ_2

מקביל למישור.

ג. אם $(x,y,z) = r(1,1,-1)$ אז המשוואות הן: **(1)** $x = r$, **(2)** $y = r$, **(3)** $z = -r$.

אם הנקודה במישור π אז צריך להתקיים: $r+3r-r-1 = 0$. אם ננסה לפתור משוואה זו

נקבל **פתרון יחיד** והוא $r = \frac{1}{3}$, כלומר **הישר** ℓ_3 **חותך את המישור בנקודה** אחת. את

נקודת החיתוך אפשר למצוא ע"י הצבת $r = \frac{1}{3}$ בהצגה של הישר. הנקודה המתקבלת

היא $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ וקל לראות שהיא מקיימת את משוואת המישור $x+3y+z-1 = 0$.

הכללים לקביעת המצב ההדדי של שני מישורים:

יהיו נתונים שני מישורים:
$\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, $\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$.

א) אם לא קיים t עבורו $(a_2,b_2,c_2)=t(a_1,b_1,c_1)$ אז המישורים נחתכים לאורכו של ישר ולהיפך.

ב) אם קיים t עבורו $(a_2,b_2,c_2)=t(a_1,b_1,c_1)$ ו-$d_2\neq td_1$ אז המישורים מקבילים ולהיפך.

ג) אם קיים t עבורו $(a_2,b_2,c_2)=t(a_1,b_1,c_1)$ ו-$d_2=td_1$ אז המישורים מתלכדים ולהיפך.

דוגמא א':
מצא את המצב ההדדי של המישור $\pi: 2x-3y+z+5=0$ עם המישורים:
א. $\pi_1: 6x-9y+3z+6=0$, ב. $\pi_2: -4x+6y-2z-10=0$, ג. $\pi_3: -2x+y+z+3=0$.

פתרון:

א. **וקטורי המקדמים של המשתנים** במישורים π ו-π_1 הם בהתאמה $(2,-3,1)$ ו-$(6,-9,3)$. אם $(6,-9,3)=t(2,-3,1)$ אז $6=2t$, $-9=-3t$, $3=t$.
הפתרון $t=3$ מקיים את כל המשוואות ולכן המישורים **מקבילים** או **מתלכדים**.
האיברים הקבועים d_1 ו-d_2 של המישורים π ו-π_1 הם בהתאמה 5 ו-6, קל לראות שמתקיים $6\neq 3\cdot 5$ ולכן המישורים **מקבילים**.

ב. וקטורי המקדמים של המשתנים במישורים π ו-π_2 הם בהתאמה $(2,-3,1)$ ו-$(-4,6,-2)$. אם $(-4,6,-2)=t(2,-3,1)$ אז קל לראות ש-$t=-2$. לגבי האיברים הקבועים, שהם 5 ו--10, נקבל $-10=-2\cdot 5$. כלומר המישורים **מתלכדים**.

ג. וקטורי המקדמים של המשתנים במישורים π ו-π_3 הם בהתאמה $(2,-3,1)$ ו-$(-2,1,1)$. במקרה כזה קל לראות **שלא** קיים t עבורו $(-2,1,1)=t(2,-3,1)$, לכן המישורים **נחתכים** לאורכו של ישר.

דוגמא ב':
נתונים המישורים $\pi_1: 2x+y-3z-1=0$, $\pi_2: x-y+6z-5=0$. מצא הצגה פרמטרית של **ישר החיתוך** של שני המישורים.

פתרון:
קל לראות שהמישורים לא מקבילים ולא מתלכדים לכן יש להם ישר חיתוך משותף.
נתייחס למשוואות שני המישורים כאל מערכת של **שתי משוואות עם שלושה נעלמים**.
כפי שכבר עשינו, **נקטין** את מספר הנעלמים ואת מספר המשוואות. נחלץ את x ממשוואת המישור π_2 ונקבל $x=5+y-6z$. נציב תוצאה זו במשוואת המישור π_1 ונקבל:
$2(5+y-6z)+y-3z-1=0$. לאחר פתיחת סוגריים, כינוס איברים וצמצום נקבל **משוואה אחת** המקשרת בין y ל-z והיא $y-5z+3=0 \quad (1)$. מכאן אפשר להמשיך בשלוש דרכים:

דרך א׳ – כדי למצוא הצגה פרמטרית של ישר מספיק למצוא שתי נקודות שעליו. אם במשוואה (1) נציב $z = 0$ נקבל $y = -3$. הצבת שתי תוצאות אלה במשוואה של x נותנת $x = 2$, לכן נקודה אחת היא $(2,-3,0)$. אם במשוואה (1) נציב $z = 1$ נקבל $y = 2$ ואז $x = 1$, לכן נקודה שנייה היא $(1,2,1)$. אפשר לבדוק, ע״י הצבה, שכל אחת מהנקודות הנ״ל מקיימת את **משוואות שני המישורים**. מכאן שווקטור כיוון של ישר החיתוך הוא $\underline{u} = (1-2\,,2+3\,,1-0) = (-1\,,5\,,1)$, ולכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $\underline{x} = (2,-3,0)+t(-1,5,1)$.

דרך ב׳ – נצא שוב מהמשוואה $y-5z+3 = 0$. נסמן $z = t$ ואז $y = 5t-3$. נציב תוצאות אלה במשוואה של x ונקבל $x = 5+(5t-3)-6t = -t+2$. מכאן נקבל כבר הצגה פרמטרית של הישר: $(x,y,z) = (-t+2\,,5t-3\,,t) = (2,-3,0)+t(-1,5,1)$.

דרך ג׳ – בהערה ד׳ שבעמ׳ 521 נראה **דרך נוספת** (המבוססת על **ניצבות**) למציאת וקטור כיוון של הישר המבוקש.

דוגמא ג׳:

נתון המישור: $\pi:\ \underline{x} = (0,1,-1)+t(3,-1,0)+s(-2,1,1)$. מצא את המצב ההדדי של המישור הנ״ל עם כל אחד מהמישורים הבאים:

א. $\pi_1:\ \underline{x} = (4,0,0)+m(5,-1,2)+n(-1,0,-1)$.

ב. $\pi_2:\ \underline{x} = (1,0,0)+m(5,-1,2)+n(-1,0,-1)$.

פתרון:

א. אם נשווה את ההצגות הפרמטריות של המישורים π ו-π_1 נקבל:

$$(0,1,-1)+t(3,-1,0)+s(-2,1,1) = (4,0,0)+m(5,-1,2)+n(-1,0,-1).$$

המשוואות המתקבלות הן: **(1)** $3t-2s = 4+5m-n$, **(2)** $1-t+s = -m$, **(3)** $-1+s = 2m-n$.

לפנינו מערכת של **שלוש משוואות עם ארבעה נעלמים**. אם למערכת כזאת יש פתרון אז הוא **איננו יחיד**. האפשרויות הן: **א) למערכת אין פתרון. ב) למערכת יש אינסוף פתרונות.** אם **אין** למערכת פתרון – ברור שהמישורים **מקבילים**. לעומת זאת, אם למערכת יש **אינסוף** פתרונות אז ייתכן שהמישורים **נחתכים** לאורך ישר **או** אולי הם **מתלכדים**. הבעיה היא להבחין בין שני המקרים. בדוגמא זו ובדוגמא הבאה נסביר כיצד לעשות זאת.

נפתור עכשיו את המערכת ע״י **שנקטין** את מספר המשוואות. אם נחלץ את n ממשוואה (3) נקבל $n = 2m-s+1$. הצבת תוצאה זו במשוואה (1) נותנת $3t-2s = 4+5m-2m+s-1$ ולבסוף (4) $t-s-m = 1$. אבל משוואה (2) גם היא $t-s-m = 1$, כלומר קיבלנו שמשוואות (2) ו-(4) **זהות**. אם נמשיך לפתור נקבל $0 = 0$, כלומר **לכל** t, s, m ו-n יש פתרון ולכן **המישורים מתלכדים**.

ב. ע״י השוואת ההצגות הפרמטריות של π ו-π_2 נקבל את המשוואות:

(1) $3t-2s = 1+5m-n$, **(2)** $1-t+s = -m$, **(3)** $-1+s = 2m-n$.

המערכת שלפנינו זהה למערכת של סעיף א׳, פרט למשוואה (1) שבאגף ימין שלה מופיע המספר 1 במקום 4. אם נפתור בדומה למה שעשינו בסעיף א׳ נקבל שמשוואה (4) היא $t-s-m = 0$. במקרה זה למשוואה (2) שהיא $t-s-m = 1$ ולמשוואה (4) **אין פתרון**. אם נמשיך לפתור נקבל $1 = 0$ וזה מראה **שהמישורים מקבילים**.

דוגמא ד':

נתונים המישורים:

$\pi_1: \underline{x} = (1,0,0)+t(2,-1,1)+s(-1,0,1)$, $\pi_2: \underline{x} = (0,1,0)+m(3,-2,1)+n(0,-1,1)$.

א. הראה שהם נחתכים.

ב. מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך.

פתרון:

א. נשווה את ההצגות הפרמטריות:

$(1,0,0)+t(2,-1,1)+s(-1,0,1) = (0,1,0)+m(3,-2,1)+n(0,-1,1)$.

המשוואות המתקבלות הן: **(1)** $1+2t-s = 3m$, **(2)** $-t = 1-2m-n$, **(3)** $t+s = m+n$.

אם נחלץ את n ממשוואה (3) נקבל $n = t+s-m$. הצבת תוצאה זו במשוואה (2) נותנת $s+m = 1$. חילוץ m ממשוואה זו נותן $m = 1-s$. הצבת תוצאה זו במשוואה (1) נותנת $t+s = 1$. למשוואה זו **אינסוף פתרונות** ולכן המישורים אינם מקבילים, נוסף לכך הם אינם מתלכדים כי אז היינו מקבלים שתי משוואות **מתלכדות**. מכאן שהמישורים **נחתכים**. (המשוואה מתקיימת אמנם לאינסוף ערכי t ו-s אבל רק בתנאי שסכומם 1 ולכן היא **אינה** מתקיימת **לכל** t ו-s, כלומר המישורים לא מתלכדים).

ב. נמצא שתי נקודות המשותפות לשני המישורים. המשוואה האחרונה שקיבלנו היא $t+s = 1$. למעשה **מספיק למצוא שני פתרונות** למשוואה זו **ואין צורך לחשב** את m ו-n. אם, למשל, $t = 0$ אז $s = 1$ וע"י הצבה במשוואת המישור π_1 נקבל שנקודה אחת משותפת היא $(0,0,1)$. אם $t = 1$ אז $s = 0$ ונקודה משותפת שנייה היא $(3,-1,1)$. (קל לראות ששתי הנקודות נמצאות גם על המישור π_2). וקטור כיוון של ישר החיתוך הוא $\underline{u} = (3-0,-1-0,1-1) = (3,-1,0)$, ולכן הצגה פרמטרית של ישר החיתוך היא $\underline{x} = (0,0,1)+r(3,-1,0)$.

דוגמא ה':

מצא את המצב ההדדי של המישור $\pi: x-y+2z = 0$ עם המישורים:

א. $\pi_1: \underline{x} = (3,1,1)+t(1,1,0)+s(-2,0,1)$.

ב. $\pi_2: \underline{x} = m(1,1,0)+n(-2,0,1)$.

ג. $\pi_3: \underline{x} = k(1,2,0)+r(1,0,0)$.

פתרון:

א. אם (x,y,z) היא נקודה על המישור π_1 אז:

$(x,y,z) = (3,1,1)+t(1,1,0)+s(-2,0,1)$.

המשוואות הן: **(1)** $x = 3+t-2s$, **(2)** $y = 1+t$, **(3)** $z = 1+s$. אם הנקודה (x,y,z) על המישור $x-y+2z = 0$ אז צריך להתקיים $(3+t-2s)-(1+t)+2(1+s) = 0$. ע"י פתרון המשוואה מקבלים $4 = 0$ וזה לא ייתכן לכן **אין פתרון** למשוואה והמישורים π_1 ו-π **מקבילים**.

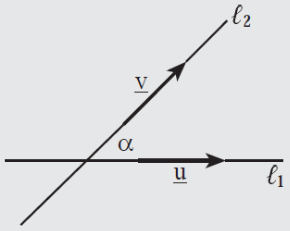
ב. המשוואות עבור המישור π_2 הן: (1) $x = m-2n$, (2) $y = m$, (3) $z = n$.
ע״י הצבה במשוואת המישור π נקבל $m-2n-m+2n = 0$. מפתרון המשוואה נקבל $0 = 0$. כלומר המשוואה מתקיימת **לכל** ערכי m ו-n ולכן המישורים π_2 ו-π **מתלכדים**.

ג. המשוואות עבור המישור π_3 הן: (1) $x = k+r$, (2) $y = 2k$, (3) $z = 0$.
ע״י הצבה במשוואת המישור π נקבל $k+r-2k+0 = 0$ כלומר $r-k = 0$.
זאת משוואה עם שני נעלמים שיש לה **אינסוף** פתרונות לכן המישורים π_3 ו-π **נחתכים** לאורכו של ישר. (המשוואה מתקיימת בתנאי ש-$k = r$, אבל לא לכל ערכי k ו-r).

הזוית בין שני ישרים – הזוית בין שני ישרים ℓ_1 ו-ℓ_2 (גם אם אינם נחתכים) מסומנת ע״י $\measuredangle(\ell_1,\ell_2)$ ומוגדרת כזוית שבין שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ (השונים מווקטור האפס) כך שאחד על ℓ_1 והשני על ℓ_2 בהתאם למקרים הבאים:

א) אם הזוית בין $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ היא חדה אז זאת הזוית שבין הישרים ℓ_1 ו-ℓ_2.

ב) אם הזוית בין $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ היא קהה אז הזוית המשלימה אותה ל-180° היא הזוית שבין הישרים ℓ_1 ו-ℓ_2.



דוגמא א׳:
הוכח שהישר $\ell:\ \underline{x} = (-1,0,2)+r(2,-1,2)$
ניצב למישור $\pi:\ \underline{x} = (2,1,0)+t(-1,4,3)+s(5,-2,-6)$.

פתרון:
עפ״י משפט (1) מספיק להוכיח שהווקטור $(2,-1,2)$, שהוא וקטור כיוון של הישר ℓ ניצב לווקטורים $(-1,4,3)$ ו-$(5,-2,-6)$, שהם וקטורים הפורשים את המישור π.
ואכן $(2,-1,2)\cdot(-1,4,3) = -2-4+6 = 0$, $(2,-1,2)\cdot(5,-2,-6) = 10+2-12 = 0$.
לכן הישר ℓ ניצב למישור π.

דוגמא ב׳:
מצא הצגה פרמטרית של הישר העובר בנקודה $(3,5,1)$ והניצב למישור $\underline{x} = (1,3,0)+t(3,2,2)+s(-2,8,1)$.

פתרון:
עפ״י משפט (1) מספיק למצוא וקטור כיוון של הישר הניצב לשני הווקטורים $(3,2,2)$ ו-$(-2,8,1)$ הפורשים את המישור. נניח שווקטור כיוון כזה הוא (a,b,c) והוא שונה מ-$\underline{0}$. צריך להתקיים:
(1) $(3,2,2)\cdot(a,b,c) = 3a+2b+2c = 0$, (2) $(-2,8,1)\cdot(a,b,c) = -2a+8b+c = 0$.
חילוץ c ממשוואה (2) נותן $c = 2a-8b$. הצבת תוצאה זו במשוואה (1) נותנת $a = 2b$. אם נציב $b = 1$ נקבל $a = 2$ ואז $c = -4$. כלומר, וקטור כיוון של ישר הניצב למישור הוא $(2,1,-4)$. מכאן שהצגה פרמטרית של הישר היא: $\underline{x} = (3,5,1)+r(2,1,-4)$.

הערה: ראה גם דוגמא א׳ בעמ׳ 447 ועל **מכפלה וקטורית** בעמ׳ 448.

דוגמא ג':

נתונות הנקודות: $A=(-1,1,0)$, $B=(0,1,1)$, $C=(1,0,-2)$.

א. הראה שהן אינן נמצאות על ישר אחד.

ב. מצא הצגה פרמטרית של הישר הניצב למישור הנקבע ע"י הנקודות A, B ו-C והעובר דרך הנקודה A.

פתרון:

א. מתקיים: $\overrightarrow{AB}=(1,0,1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,-1,-2)$. קל לראות שלא קיים t כך ש-$\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$ ולכן הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו-$\overrightarrow{AC}$ אינם על ישר אחד. מכאן שהנקודות A, B ו-C קובעות מישור יחיד.

ב. נדגיש מייד שאין צורך למצוא הצגה פרמטרית של המישור ABC.
עפ"י משפט (1) אם $\underline{u}=(a,b,c)$ הוא וקטור הניצב למישור ABC אז צריך להתקיים: $\underline{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ וגם $\underline{u}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. כלומר:
(1) $(a,b,c)\cdot(1,0,1)=a+c=0$, **(2)** $(a,b,c)\cdot(2,-1,-2)=2a-b-2c=0$.
בדומה לפתרון הדוגמא הקודמת נקבל כאן שווקטור כיוון הוא $(-1,-4,1)$.
מכאן שהצגה פרמטרית של הישר הניצב למישור ABC והעובר דרך A היא:
$\underline{x}=(-1,1,0)+t(-1,-4,1)$.

דוגמא ד':

הוכח שהישר $\ell:\ \underline{x}=(1,-2,0)+t(-4,6,-2)$ ניצב למישור $\pi:\ 2x-3y+z-5=0$.

פתרון:

נסתמך על כך שאם ישר ניצב למישור אז כל ישר המקביל לו ניצב אף הוא למישור. וקטור כיוון של הישר ℓ הוא $\underline{u}=(-4,6,-2)$. וקטור **מקדמי המשתנים** של המישור π הוא $\underline{v}=(2,-3,1)$ ועפ"י משפט (3) הוא **ניצב למישור** π. עבור $t=-2$ מתקיים $(-4,6,-2)=t(2,-3,1)$ כלומר הישר ℓ מקביל לווקטור $\underline{u}$ ולכן הישר ℓ **ניצב** גם הוא למישור π.

דוגמא ה':

מצא הצגה פרמטרית של הישר העובר בנקודה $(5,-1,0)$ והניצב למישור $3x-7y+z-2=0$.

פתרון:

וקטור מקדמי המשתנים במשוואת המישור הוא $(3,-7,1)$. עפ"י משפט (3) וקטור זה הוא גם **וקטור כיוון** של כל ישר הניצב למישור. לכן הצגה פרמטרית של הישר היא $\underline{x}=(5,-1,0)+t(3,-7,1)$.

דוגמא ו':

מצא את משוואת המישור הניצב לווקטור $(2,-1,4)$ והעובר דרך הנקודה $A=(3,5,-1)$.

פתרון:

לפי הנתון, וקטור המקדמים של המשתנים במשוואת המישור הוא $(2,-1,4)$ ולכן למשוואת המישור הצורה $2x-y+4z+d=0$. היות והנקודה A במישור הרי שהיא מקיימת את משוואתו, לכן $2\cdot3-1\cdot5+4\cdot(-1)+d=0$. מכאן $-3+d=0$, כלומר $d=3$. לכן משוואת המישור היא $2x-y+4z+3=0$.

דוגמא ז':

נתונים הישרים $\ell_1:\ \underline{x}=t(1,2,-3)$, $\ell_2:\ \underline{x}=(0,1,-2)+s(4,1,2)$.

א. הראה שהישרים ℓ_1 ו-ℓ_2 ניצבים זה לזה.

ב. מצא את משוואת המישור הניצב לישר ℓ_1 והמכיל את הישר ℓ_2.

פתרון:

א. נבדוק מכפלה סקלרית של וקטורי כיוון של הישרים ℓ_1 ו-ℓ_2:

$(1,2,-3)\cdot(4,1,2)=1\cdot4+2\cdot1-3\cdot2=4+2-6=0$ לכן הישרים ניצבים זה לזה.

ב. אם המישור ניצב לישר ℓ_1 אז משוואת המישור היא מהצורה $x+2y-3z+d=0$. אם הישר ℓ_2 מוכל במישור אז כל נקודה שלו נמצאת במישור. עבור $s=0$ נקבל שהנקודה $(0,1,-2)$ נמצאת על הישר ℓ_2 ולכן גם במישור. כמו בדוגמא הקודמת, נציב את שיעורי הנקודה $(0,1,-2)$ ונקבל $1\cdot0+2\cdot1-3\cdot(-2)+d=0$. כלומר $d=-8$ ולכן משוואת המישור היא $x+2y-3z-8=0$.