תרגיל מ"ס 5

1. פתרו את הבעיה

$$\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=(1-x)\,cos\,(t)\,, & 0\leq x\leq \pi,\quad t\geq 0 \\ u\,(x,0)=\frac{x^2}{2\pi}, & 0\leq x\leq \pi \\ u_t\,(x,0)=cos\,(3x)\,, & 0\leq x\leq \pi \\ u_x\,(0.t)=cos\,(t)-1,\quad u_x\,(\pi,t)=cos\,(t)\,, & t\geq 0 \end{cases}$$

2. יהי m מספר טבעי ויהי $\omega\in\mathbb{R}$.
א) נניח תחילה כי $\omega^2\neq m^2\pi^2$. פתרו את בעיית הגלים הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=sin\,(m\pi x)\,sin\,(\omega t)\,, & 0\leq x\leq 1,\quad t\geq 0 \\ u\,(x,0)=u_t\,(1,t)=0, & 0\leq x\leq 1 \\ u\,(0,t)=u\,(1,t)=0, & t\geq 0 \end{cases}$$

ב) פתרו את הבעיה עבור $\omega^2=m^2\pi^2$.
ג) תאר את תופעת התהודה שקיבלת בסעיף ב'.

3. בשאלה זו נדון בבעיית הטלגרף:

$$\begin{cases} u_{tt}+u_t-c^2u_{xx}=0, & a\leq x\leq b,\quad t\geq 0 \\ u\,(x,0)=f\,(x)\,, & a\leq x\leq b, \\ u_t\,(x,0)=g\,(x)\,, & a\leq x\leq b, \\ u\,(a,t)=u_x\,(b,t)=0, & t\geq 0 \end{cases}$$

בהינתן פתרון אמיתי של בעיית הטלגרף $u\,(x,t)$, נגדיר "אינטגרל האנרגיה" באופן הבא:

$$E\,(t)=\frac{1}{2}\int\limits_a^b\left[u_t^2+c^2u_x^2\right]dx$$

א) הוכח כי $E(t)$ מקיים $E'(t) \leq 0$ עבור $t > 0$.
ב) בעזרת אינטגרל האנרגיה ותוצאות של סעיף א', הוכיחו את יחידות הפתרון לבעיית הטלגרף.

4. פתרו את הבעיה:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 2t + (9t+31)\,sin\left(\frac{3x}{2}\right), & 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = t^2, & t \geq 0 \\ u_x(\pi,t) = 1, & t \geq 0 \\ u(x,0) = x + 3\pi, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

5. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ ונתבונן בבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + \alpha u = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

א) מצא פתרון לבעיה.
ב) מצא את $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$.

6. יהיו u, v זוג פתרונות של משוואת החום בתחום $\{0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t < \infty\}$ כך ש-

$$\begin{cases} u(x,0) \leq v(x,0), & 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) \leq v(0,t), & 0 \leq t < \infty \\ u(L,t) \leq v(L,t), & 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

הוכיחו כי $u(x,t) \leq v(x,t)$ לכל x ו-t בתחום. (רמז: השתמשו בעיקרון המקסימום עבור משוואת החום).