אנליזה מודרנית – תרגול 11: מרחבי לבג $L^p\left(X,S,\mu\right)$.

תזכורת: יהי $\left(X,S,\mu\right)$ ממ"ח. מרחב לבג ממעלה $1\le p<\infty$ מוגדר ע"י

$L^p\left(X,S,\mu\right)=\left\{f:\int_X\left|f\right|^p d\mu<\infty\right\}$. מגדירים בנוסף $\left\|f\right\|_p:=\left(\int_X\left|f\right|^p d\mu\right)^{1/p}$ כך שבעצם

$L^p\left(X,S,\mu\right)=\left\{f:\left\|f\right\|_p<\infty\right\}$ סימונים נוספים הם $L^p\left(X\right),L^p\left(\mu\right),L^p\left(d\mu\right)$.

ישנו גם המרחב $L^\infty\left(X\right)$ המכיל את כל הפונקציות החסומות בעיקר: $L^\infty\left(X\right)=\left\{f:\left\|f\right\|_\infty<\infty\right\}$

כאשר $\left(f\right)$ $\left\|f\right\|_\infty=\inf_{f\sim g}\sup_{x\in X}\left|g\left(x\right)\right|=\operatorname{ess\,sup}_X$

תרגיל: תהיינה $\left\{f_n\right\}_{n=1}^\infty$ סדרת פונקציות רציפות בהחלט בקטע $\left[0,1\right]$, המקיימות $f_n\left(0\right)=0$.

נניח כי $\int_0^1\left|f_m^{'}-f_n^{'}\right|dm\to 0$ כאשר $m,n\to\infty$ (יחדיו). הוכיחו כי הסדרה f_n מתכנסת במ"ש

בקטע $\left[0,1\right]$ לפונקציה כלשהי f הרציפה בהחלט בקטע.

פתרון: נתון כי סדרת הנגזרות $\left\{f_n^{'}\right\}_{n=1}^\infty$ היא קושי במרחב $L^1\left(\left[0,1\right]\right)$, ומאחר וזה מרחב בנך

(שלם), אנו יודעים שהסדרה $\left\{f_n^{'}\right\}$ מתכנסת לאיזושהי $g\in L^1$ בנורמה. נגדיר $f=\int_0^x gdm$, ומאחר

ו- $g\in L^1$ (g אינט') הכללת לבג למשפט היסודי אומרת כי f רציפה בהחלט (כאינט' לא מסוים).

נטען כי f מקיימת את שאר הדרישות. ובכן, כל f_n רציפה בהחלט ולכן מקיימת את נוסחת ניוטון

לייבניץ $f_n\left(x\right)=f_n\left(0\right)+\int_0^x f_n^{'}dm=\int_0^x f_n^{'}dm$. ומכאן, לכל $x\in\left[0,1\right]$:

$$\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=\left|\int_0^x f_n^{'}dm-\int_0^x gdm\right|=\left|\int_0^x\left(f_n^{'}-g\right)dm\right|\le\int_0^x\left|f_n^{'}-g\right|dm\le\int_0^1\left|f_n^{'}-g\right|dm=\left\|f_n^{'}-g\right\|_1$$

ניקח sup: $\sup_{x\in\left[0,1\right]}\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\le\sup_{x\in\left[0,1\right]}\left\|f_n^{'}-g\right\|_1=\left\|f_n^{'}-g\right\|_1\xrightarrow{n\to\infty}0$ וסיימנו ע"פ קריטריון הsup.

תרגיל*: נניח כי $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות, בעלת "תנאי שפה הומוגניים" $f\left(a\right)=f\left(b\right)=0$

ומקיימת $\int_a^b f^2dm=1$. הוכיחו כי מתקיים $\int_a^b xff'dm=-\frac{1}{2}$ וגם $\left[\int_a^b\left(f'\right)^2dm\right]\left[\int_a^b x^2f^2dm\right]>\frac{1}{4}$

פתרון: הכל רציף ולכן נעבוד עם אינטגרל רימן. נשתמש באינטגרציה לפי חלקים:

$$\frac{1}{2}=\int_a^b f^2\left(x\right)dx=xf^2\left(x\right)\Big|_a^b-\int_a^b 2xf\left(x\right)f'\left(x\right)dx\Rightarrow\int_a^b xf\left(x\right)f'\left(x\right)dx=-\frac{1}{4}$$

ניקח ערך מוחלט לקבל

$$\frac{1}{2}=\left|\int_a^b xf(x)f'(x)dx\right|\le\int_a^b\left|xf(x)f'(x)\right|dx=\|xff'\|_1\overset{H\ddot{o}lder}{\le}\|f'\|_2\|xf\|_2=\left[\int_a^b\left(f'(x)\right)^2dx\right]^{1/2}\left[\int_a^b x^2f(x)^2dx\right]^{1/2}$$

נעלה בריבוע לקבל $\frac{1}{4}\le\left[\int_a^b\left(f'(x)\right)^2dx\right]\left[\int_a^b x^2f(x)^2dx\right]$ אך אנו רוצים א"ש חזק!

מתקבל שוויון בא"ש הולדר או"א ישנם קבועים $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (לא שניהם 0) כך ש-

$\alpha\left(f'(x)\right)^2=\beta\left(xf(x)\right)^2$ כב"מ בקטע $[a,b]$, ובגלל הרציפות הכב"מ הופך לבכל מקום. אם

$\alpha=0$ אז $\beta\ne0$ ומקבלים $xf(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$ - וזו סתירה לכך ש$\int_a^b f^2(x)dx=1$. אם

$\alpha\ne0$ נקבל מד"ר $\left(f'(x)\right)^2=\frac{\beta}{\alpha}\left(xf(x)\right)^2\Rightarrow f'(x)=\pm\frac{\beta}{\alpha}xf(x)=cxf(x)$ ניתן להפריד

משתנים ולקבל $\int\frac{df}{f}=\int cxdx\Rightarrow\ln|f|=c\frac{x^2}{2}+k\Rightarrow f(x)=Ae^{cx^2/2}$ האקספוננט אינו מתאפס

לעולם, ולכן תנאי השפה $f(a)=f(b)=0$ ייתנו $A=0$ ומכאן $f\equiv0$ וזו שוב סתירה.

תרגיל: יהי (X,S,μ) ממ"ח ממידה סופית (כלומר $\mu(X)<\infty$) ויהיו $1\le r<p<\infty$. הוכיחו כי $L^p(X,S,\mu)\subseteq L^r(X,S,\mu)$.

<u>פתרון:</u> תהי $f\in L^p$ המספרים $t=\frac{p}{r},s=\frac{p}{p-r}$ הם מעריכים צמודים (סכום ההופכיים 1), וע"פ א"ש הולדר

$$\|f\|_r^r=\int_X|f|^r\cdot1d\mu=\left\||f^r|\cdot1\right\|_1\le\left(\int_X\left(|f|^r\right)^td\mu\right)^{1/t}\left(\int_X1^sd\mu\right)^{1/s}=\left(\int_X|f|^pd\mu\right)^{1/t}\mu(X)^{1/s}<\infty$$

ומכאן $\|f\|_r<\infty$ ולכן $f\in L^r$.

<u>דוגמה:</u> הממ"ח $([0,1],L,m)$ סופי. ידוע כי $x^{-1/4}\in L^1([0,1])$ ($\int_0^1x^{-1/2}dm(x)=2\sqrt{x}\Big|_0^1=2<\infty$)

ולכן מתקיים $x^{-1/4}\in L^1$ או $\int_0^1x^{-1/4}dm(x)<\infty$.

<u>הערה:</u> אם הממ"ח אינו סופי, אין הכלה בשום כיוון. (ש"ב).

<u>תרגיל:</u> נתבונן בממ"ח $([0,1],L,m)$, ונגדיר סדרת פונקציות ע"י $g_n(x)=n\cdot I_{[0,n^{-3}]}(x)$.

א. הוכיחו כי לכל $f\in L^2([0,1])$ מתקיים $\int_0^1f(x)g_n(x)dm(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$.

ב. הראו שיש $f\in L^1([0,1])$ עבורה $\int_0^1 f(x)g_n(x)dm(x)\overset{n\to\infty}{\not\to}0$

<u>פתרון:</u> א.

$$d\left(\int_0^1 f(x)g_n(x)dm(x),0\right)=\left|\int_0^1 f(x)g_n(x)dm(x)-0\right|\le\int_0^1\left|f(x)g_n(x)\right|dm(x)\le\|f\|_2\|g_n\|_2$$

וניתן לחשב $\|g_n\|_2=\left(\int_0^1\left|n\cdot I_{[0,n^{-3}]}\right|^2dm\right)^{1/2}=\left(\int_0^1 n^2I_{[0,n^{-3}]}dm\right)^{1/2}=\left(n^2m([0,n^{-3}])\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{n}}$

כלומר $\left|\int_0^1 f(x)g_n(x)dm(x)-0\right|\le\frac{\|f\|_2}{\sqrt{n}}\overset{n\to\infty}{\to}0$ כנדרש (ע"פ תרגיל קודם ניתן להחליף את L^2 בכל מרחב $L^{p>2}$).

ב. ניקח $f=x^{-2/3}\in L^1([0,1])$ (f אינטגרבילית לבג כי היא אינט' רימן בהחלט) . נחשב

$$\int_0^1 f(x)g_n(x)dm(x)=\int_0^{n^{-3}}x^{-2/3}ndm(x)=3x^{1/3}n\Big|_{x=0}^{x=n^{-3}}=3\overset{n\to\infty}{\to}3\neq0.$$

<u>תרגיל:</u> יהיו $(X,\|\ \|_X),(Y,\|\ \|_Y)$ שני מרחבי בנך. ניתן למכפלה הקרטזית $X\times Y$ מבנה לינארי ע"י $\alpha(x,y):=(\alpha x,\alpha y)$, $(x_1,y_1)+(x_2,y_2):=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ ו- $\|(x,y)\|:=\|x\|_X+\|y\|_Y$

הוכיחו כי $(X\times Y,\|\ \|)$ מרחב בנך.

<u>פתרון:</u> תהי $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב- $X\times Y$, ויש להוכיח שיש לה גבול שם. ביתר פירוט, לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שאם $m,n\ge N$ אזי $\|(x_m,y_m)-(x_n,y_n)\|<\varepsilon$ ז"א $\|(x_m-x_n,y_m-y_n)\|=\|x_m-x_n\|_X+\|y_m-y_n\|_Y<\varepsilon$. מכאן שלכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שאם $m,n\ge N$ אזי $\|x_m-x_n\|_X<\varepsilon$ וגם $\|y_m-y_n\|_Y<\varepsilon$. קיבלנו שהסדרות $\{x_n\}\subseteq X,\{y_n\}\subseteq Y$ הן סדרות קושי, ומאחר ואילו מרחבי בנך הסדרות מתכנסות: $x_n\to x,y_n\to y$. נטען כי הגבול של סדרתנו הוא $(x_n,y_n)\to(x,y)$. הוכחה:

$\|(x_n,y_n)-(x,y)\|=\|(x_n-x,y_n-y)\|\le\|x_n-x\|_X+\|y_n-y\|_Y\to0$. מש"ל.