

# אלגברה לינארית 1 (88112), סמסטר קיץ תשפ"ה, מועד א'

28.8.2025, ד' באלול התשפ"ה

מרצים: עוזי חרוש, אריאל ויצמן, דניס גולקן, ארז שיינר.  
מתרגלים: יחזקאל אימרה רגב, בוריס גוליקוב, שירה ידעי, נמרוד נדבורני, עידו פלדמן, איתן פרימן, אביתר ישראל שויקה.  
אורך המבחן: 3 שעות.  
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.  
הנחיות:

- יש לענות על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

**תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטייטה לא תבדק.**

**ניתן לענות משני צידי הדף.**

בהצלחה!

1. נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

(א) (10 נקודות) מצאו בסיסים לתתי-המרחבים הבאים של  $\mathbb{R}^3$ :

i.  $N(A) + C(A)$ .

ii.  $N(A) \cap C(A)$ .

(ב) (8 נקודות) האם  $A$  הפיכה? אם כן מצאו את ההופכית  $A^{-1}$ , אם לא מצאו  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$  כך ש  $AB = 0$ .

(ג) (8 נקודות) תהא  $B \in \mathbb{R}^{3 \times k}$  כך ש  $AB = 0$ . מה האפשרויות ל  $\text{rank}(B)$ ?

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_

2. (8 נקודות כל סעיף) תהא  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  העתקה לינארית התלויה בפרמטר  $a$ :

$$T \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + ay + z \\ ax + y + az \\ x + y + az \end{pmatrix}$$

(א) עבור אילו ערכי  $a \in \mathbb{R}$  ההעתקה  $T$  הפיכה?

(ב) לכל ערך של  $a$  עבורו  $T$  לא הפיכה בדקו האם  $\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \in \text{Im}(T)$ ? במקרה שכן, האם ישנם  $u \neq v$  ב- $\mathbb{R}^3$  כך ש

$$Tv = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = Tu$$

(ג) עבור  $a = 1$  הוכיחו או הפריכו: קיים בסיס סדור  $B$  כך שבמטריצה המייצגת  $[T]_B^B$  יש שתי עמודות אפסים ושתי שורות אפסים.

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_

3. (8 נקודות כל סעיף) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$ . לכל שתי קבוצות סופיות  $A, B \subseteq V$  מתקיים: אם  $\text{span}(A) \cap \text{span}(B) \neq \{0\}$  אז  $\text{span}(A) \cup \text{span}(B)$  הוא תת-מרחב של  $V$ .

(ב) יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$ . לכל שתי קבוצות סופיות  $A, B \subseteq V$  מתקיים: אם  $\text{span}(A) \cap \text{span}(B) \neq \{0\}$  וגם  $A \cap B = \emptyset$  אז  $A \cup B$  תלויה לינארית.

(ג) יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל שדה  $\mathbb{F}$  מממד  $n \geq 2$ , ויהי  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  בסיס של  $V$ . לכל  $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$  מתקיים:  $B' = \{v_1, v_2 + \alpha_2 v_1, \dots, v_n + \alpha_n v_1\}$  בסיס של  $V$  (כלומר, לכל  $2 \leq i \leq n$  מוסיפים ל- $v_i$  כפולה כלשהי של  $v_1$ ).

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_

4. (8 נקודות כל סעיף)

(א) תזכורת להגדרה: יהי  $V$  מרחב וקטורי ויהיו  $U, W$  תתי-מרחבים. נאמר ש  $V$  הוא סכום ישר של  $U, W$  ונסמן

$$V = U \oplus W \text{ אם } V = U + W \text{ וגם } U \cap W = \{0\}.$$

תהא  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  הוכיחו:  $\text{rank}(A^2) = \text{rank}(A)$  אם ורק אם  $\mathbb{F}^n = C(A) \oplus N(A)$ .

(ב) תהיינה  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  הוכיחו שאם  $AB = 0$  אז  $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n$ .

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_

5. (8 נקודות כל סעיף) יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל  $\mathbb{R}$ , ותהא  $T : V \rightarrow W$  העתקה לינארית. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם לכל שני בסיסים סדורים  $B, C$  ל  $V, W$  קיים  $i$  כך ש

$$C_i \left( [T]_C^B \right) = 0$$

(העמודה ה- $i$  של המטריצה המייצגת היא עמודת אפסים) אז  $T = 0$  (העתקת האפס).

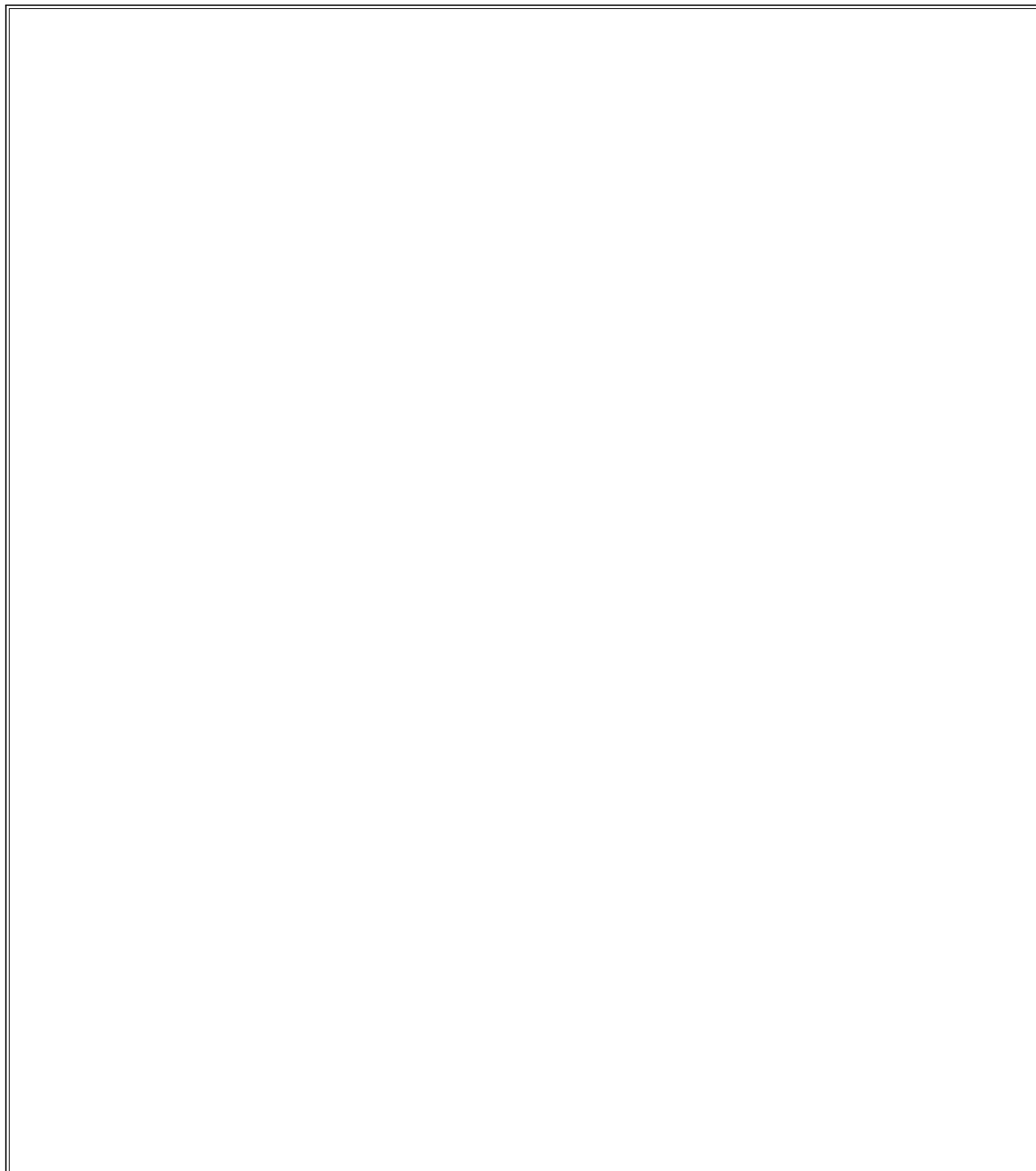
(ב) אם לכל שני בסיסים סדורים  $B, C$  ל  $V, W$  קיימים  $i, j$  כך ש

$$\left( [T]_C^B \right)_{i,j} = 0$$

(האיבר במקום ה- $i, j$  של המטריצה המייצגת הוא 0) אז  $T = 0$  (העתקת האפס).

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_

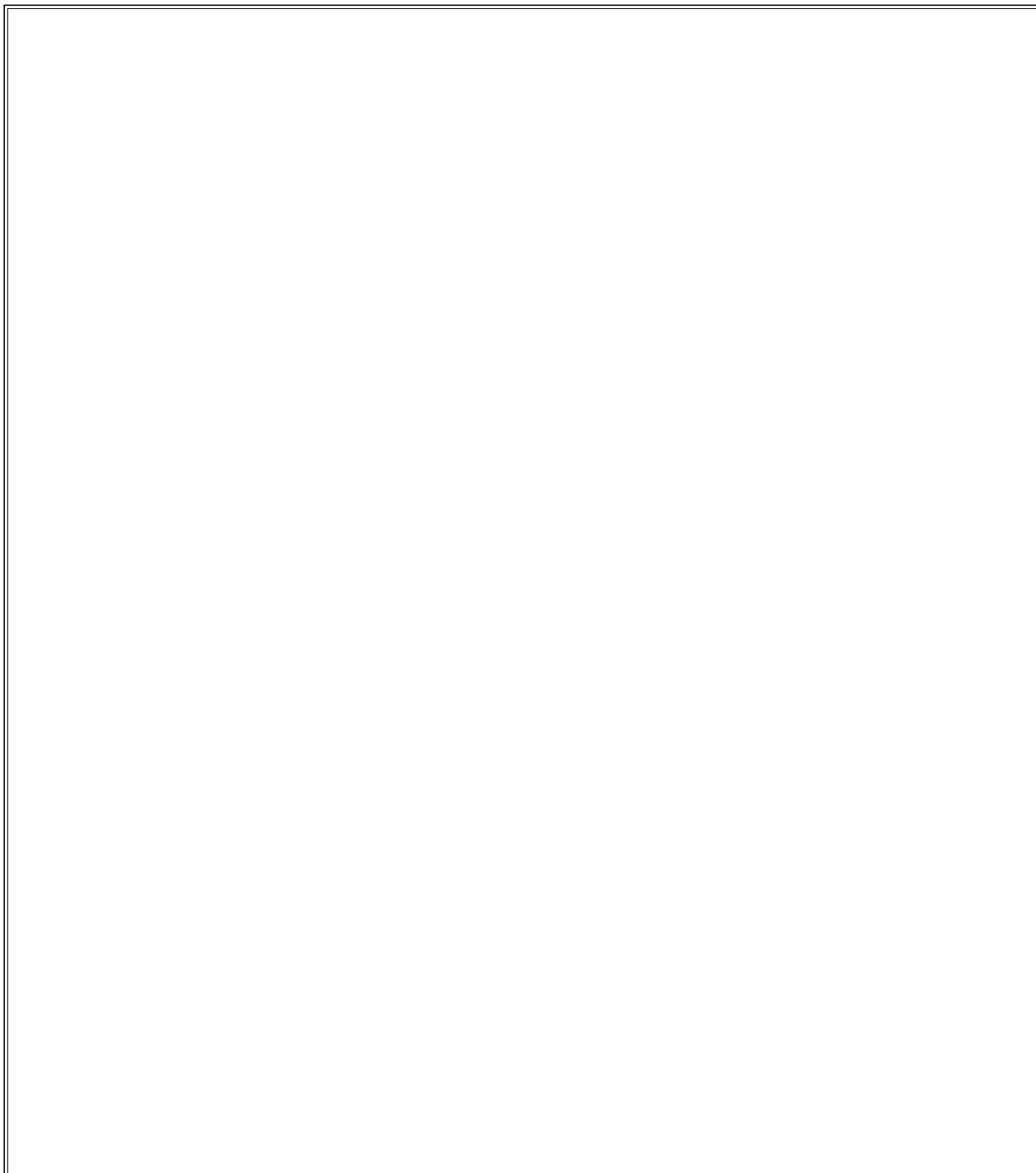
A large, empty rectangular box with a thin black border, occupying the central portion of the page. It is intended for the student to provide a written answer to the question.

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_



דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_

