אנליזה מודרנית
תרגיל 5

תאריך הגשה: 6.12.12

תרגיל 1 תזכורת: מידה μ על מרחב מדיד $(X,\mathcal{S})$ נקראית שלמה אם לכל קבוצה מדידה $E\in\mathcal{S}$ עבורה $\mu(E)=0$, מתקיים שכל תת קבוצה שלה $F\subseteq E$ היא מדידה (כלומר, נמצאת ב־$\mathcal{S}$).

יהי $(X,\mathcal{S},\mu)$ מרחב מידה חיובית ושלמה ותהי $f:X\to\mathbb{R}^*$ פונקציה מדידה. תהי $g:X\to\mathbb{R}^*$ פונקציה השווה ל־f כמעט בכל מקום, ז"א $\mu\left(\{x\in X: f(x)\neq g(x)\}\right)=0$. הוכיחו כי g אף היא מדידה.

תרגיל 2 בתרגיל הקודם הוכחנו שלכל $p>0$ מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2}=-\int_0^1\frac{x^p}{1-x}\log x dm(x)$$

לא קשה לראות שהנוסחא נכונה גם עבור $p=0$, ובמקרה זה מקבלים

$$-\int_0^1\frac{\log x}{1-x}dm(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)$$

כאשר $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ היא פונקציית זטא של רימן.

הוכיחו את ההכללה הבאה של תוצאה זו: לכל $s\geq 2$ טבעי, מתקיים

$$\zeta(s)=\frac{1}{(s-1)!}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dm(x)$$

הדרכה:

1. הוכיחו כי לכל $s\geq 2$ וטבעי מתקיים

$$-\int_0^1\frac{\log^{s-1}x}{1-x}dm(x)=(-1)^s(s-1)!\zeta(s)$$

2. בצעו החלפת משתנים מתאימה, כלומר כזו שתעביר את תחום האינטגרציה מהקטע $(0,1)$ אל הקרן $(0,\infty)$.[1]
3. ברכות! מצאתם ייצוג אינטגרלי של פונקציית זטא .

[1] אולי עדיף לפצל לשתי החלפות משתנים.

תרגיל 3 יהיו $a \neq 0, b$ מספרים ממשיים, ותהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מדידה לבג ואינטגרבילית. הוכיחו כי מתקיים

$$\frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(ax+b)$$

הדרכה:

1. הוכיחו זאת תחילה לפונקציות אינדיקטור. לשם כך בדקו מהי הפונקציה $I_E(ax+b)$ כאשר

$$I_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

2. הוכיחו כי הטענה נכונה גם לפונקציות פשוטות.

3. הוכיחו זאת לפונקציות חיוביות כלשהן בעזרת משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג.

4. כדי להראות זאת לפונקציה כללית, אפשר להראות שאם $g(x) = f(ax+b)$, אזי $g^+(x) = f^+(ax+b)$ ו־ $g^-(x) = f^-(ax+b)$, כאשר $g^+ \geq 0$ ו־$g^- \geq 0$ הן החלק החיובי והשלילי בהתאמה של הפונקציה g.