

אלגברה לינארית 1 (88112) – סמסטר קיץ תשפ"ה – בוחן

הצעה לפתרון באדיבות עדי מכנס

1. תהא $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ מטריצה שלאחר פעולות דירוג מתקבלת המטריצה הבאה:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

א. (10 נק') מצאו את הפתרון הכללי של המערכת $Ax = 0$.

פתרון:

קל לוודא כי U מטריצה מדורגת קנונית. כמו כן, קל לראות כי אם נסמן $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ אזי x_2, x_5

משתנים חופשיים. לכן נציב פרמטר $x_2 = t, x_5 = s$ ונקבל:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_5 = -2t + s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -x_5 = -s \\ 0 = 0 \end{cases}$$

לכן הפתרון הכללי יהיה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2t + s \\ t \\ 0 \\ -s \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

ב. (15 נק') יהיו $u, v \in \mathbb{R}^5$ כך ש $v - u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. הוכיחו שלכל $b \in \mathbb{R}^4$ מתקיים: $Av = b$ אם

ורק אם $Au = b$.

פתרון:

ראשית, קל לוודא כי עבור $t = s = 1$ מהסעיף הקודם נקבל את הוקטור הנתון. לפיכך $v - u$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית. כלומר:

$$\vec{0} = A(v - u) = Av - Au$$

(אלגברת מטריצות) כלומר:

$$\Leftrightarrow Av = Au$$

ולכן אם $Av = b$ אזי גם $Au = b$ (וכן להיפך, כמובן).

משל ■.

ג. (10 נק') הוכיחו או הפריכו: למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ אין פתרון.

פתרון:

הפרכה

נביט במערכת המבוטאת ע"י מטריצת מקדמים ווקטור קבועים:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

נדרג ונקבל:

$$\xrightarrow{R_5 - R_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} U & & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 0 \end{array} \right)$$

אבל קל לראות שלמערכת הזו אין שורות סתירה, ולפיכך למערכת זו יש פתרון.

2. (15 נק' לכל סעיף) נתבונן במרחב המטריצות הריבועיות $V = \mathbb{R}^{n \times n}$. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות קבעו האם היא תת-מרחב של V או לא. הוכיחו את תשובתכם.
א. $U = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}: A^t = \alpha A\} \subseteq V$.

פתרון:

נראה כי U אינו תת-מרחב של V ע"י כך שנוכיח שהקריטריון המקוצר לא מתקיים עבור:

$$A = I_2(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$$

(עם סקלר $\alpha_A = 1$ וכן:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in U$$

(עם סקלר $\alpha_B = -1$) יחד עם הסקלר $c = 1 \in \mathbb{R}$.

נשים לב כי:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$(A+B)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ונוכיח שלא קיים α כך ש:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (A+B)^t = \alpha(A+B) = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

אכן, משוויון מטריצות נקבל כי:

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot \alpha \\ -1 = 1 \cdot \alpha \end{cases} \rightarrow -1 = \alpha = 1$$

סתירה.

ב. עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר: $W_\alpha = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^t = \alpha A\} \subseteq V$.

פתרון:

נוכיח שאכן לכל α מתקיים כי W_α תמ"ו של V .

יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. ניעזר בקריטריון המקוצר:

אכן, מטריצת האפס מקיימת לכל α :

$$0_{n \times n} = 0_{n \times n}^t = \alpha \cdot 0_{n \times n} = 0_{n \times n}$$

כעת, יהיו $A, B \in W_\alpha$ וכן $c \in \mathbb{R}$. צ"ל $A + cB \in W_\alpha$. כלומר צ"ל:

$$(A + cB)^t = \alpha(A + cB)$$

נפתח לפי אלגברת מטריצות:

$$(A + cB)^t = A^t + cB^t$$

אבל לפי הנתון:

$$A^t + cB^t = \alpha A + c(\alpha B) = \alpha A + \alpha(cB) = \alpha(A + cB)$$

כנדרש.

■ משל

3. (15 נק' לכל סעיף) נאמר כי מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ דומה למטריצה $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אם קיימת $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש $P^{-1}AP = B$ או באופן שקול: $AP = PB$.

הערה כללית לאורך כל השאלה: למען הנוחות, נסמן ש A דומה ל B ע"י $A \sim B$.

א. תהיינה $A, B, C \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכיחו שאם A דומה ל B וגם B דומה ל C אז A דומה ל C .

פתרון:

כיוון ש $A \sim B$ וגם $B \sim C$, קיימות מטריצות הפיכות $P_{A,B}, P_{B,C} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש:

$$\begin{cases} B = P_{A,B}^{-1} \cdot A \cdot P_{A,B} \\ C = P_{B,C}^{-1} \cdot B \cdot P_{B,C} \end{cases}$$

וצריך למצוא $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה כך ש:

$$C = P^{-1}AP$$

נציב את הנתון הראשון בנתון השני ונקבל:

$$C = P_{B,C}^{-1} \cdot (P_{A,B}^{-1} \cdot A \cdot P_{A,B}) \cdot P_{B,C} = (P_{B,C}^{-1} P_{A,B}^{-1}) A (P_{A,B} P_{B,C})$$

ולכן אם נבחר:

$$P = P_{A,B} P_{B,C}$$

נקבל מאלגברת מטריצות כי P אכן הפיכה וההופכית שלה:

$$P^{-1} = P_{B,C}^{-1} P_{A,B}^{-1}$$

ולכן אכן נקבל את הנדרש.

■ משל

העשרה: דמיון מטריצות הוא יחס שקילות על $\mathbb{F}^{n \times n}$. מה שהוכחנו לעיל היה תכונת הטרנזיטיביות. הקוראים מוזמנים להוכיח את שאר התכונות.

ב. יהא $\alpha \in \mathbb{F}$ ותהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש $A = \alpha I$. הוכיחו או הפריכו: קיימת $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש $B \neq A$ וגם B דומה ל A .

פתרון:

הפרכה

ניקח את $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (למען האמת כל שדה יעבוד אך זוהי טענת לכל על השדה במובלע) ואת $\alpha = 0$.
לכן $A = 0_{n \times n}$. כעת, נניח בשלילה שאכן קיימת $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כנ"ל. לכן קיימת $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש:

$$P^{-1}BP = A = 0_{n \times n}$$

נכפיל את שני הצדדים ב P^{-1} מימין ונקבל:

$$P^{-1}B = 0_{n \times n}$$

נכפיל את שני הצדדים ב P משמאל ונקבל:

$$B = 0_{n \times n}$$

בסתירה לכך ש $B \neq A$.

ג. תהא $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ מטריצה המקיימת:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

הוכיחו: A דומה ל $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

פתרון:

עלינו למצוא P הפיכה כך ש:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ננחש כי:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(הוקטורים הנתונים לעיל, בעמודות של P). קל לוודא כי P הפיכה וכן:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{(-1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ואכן, אם נחשב את הכפל נקבל לפי כפל לפי עמודות:

$$P^{-1}AP = P^{-1}(AP) = P^{-1} \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline AC_1(P) & AC_2(P) \\ \hline & \end{array} \right) =$$

אבל $C_1(P), C_2(P)$ הם בדיוק הווקטורים הנתונים! לפיכך אנחנו יודעים מהי המכפלה בדיוק!

$$= P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

כנדרש.

■ משל

העשרה: ניחוש מושכל זה לא בא במקרה. על הטריק הזה עוד תלמדו בקורס אלגברה לינארית 2, ושמו לכסון.