חודא 2 להנדסה תשפה בוחן- פתרון

1. תהא $0 \leq a_n$ סדרה אי-שלילית. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

פתרון: בכיוון אחד $(\Leftarrow)$ נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. כיוון ש $0 \leq a_n$ מתקיים כי

$$\frac{a_n}{1+a_n} \leq \frac{a_n}{1+0} = a_n$$

לכל n. כיוון ששני הטורים חיובים, לפי מבחן השוואה, כיוון ש $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

בכיוון שני $(\Rightarrow)$ נניח הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס. כיוון ש

$$\frac{a_n}{1+a_n} = \frac{a_n+1-1}{1+a_n} = 1 - \frac{1}{1+a_n}$$

ו $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0$ (כי זה האיבר הכללי בטור מתכנס). נקבל ש

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{a_n}{1+a_n} = 1$$

כעת נוכל להשתמש במבחן ההשואה לטורים חיובים לקבל כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n} = 1$$

ולכן הטורים חברים. כיוון ש $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

2. נביט בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n - \sin(n)}$$

(א) קבעו האם הטור מתכנס בהחלט.

פתרון: מתקיים כי

$$\left|\frac{(-1)^n}{2n-\sin(n)}\right| = \frac{1}{|2n-\sin(n)|} = \frac{1}{2n-\sin(n)} \geq \frac{1}{2n+1}$$

(כאשר אפשר להוריד את הערך המוחלט כיוון ש $2n$ גדול שווה מ 2 שיותר גדול מ $\sin(n)$). הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ חיובי והוא חבר של $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ שהרי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

לכן, כיוון ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר גם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$. לפי מבחן ההשואה של טורים חיובים כיוון ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ מתבדר גם $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2n-\sin(n)}\right|$ ולכן הטור שלנו לא מתכנס בהחלט.

(ב) הוכיחו כי הטור מתכנס.

פתרון: זה טור של איברים מתחלפים. נוכיח שהסדרה

$$a_n = \frac{1}{2n-\sin(n)}$$

מונוטונית יורדת לאפס ואז לפי לייבניץ נסיק כי הטור מתכנס. נגדיר פונקציה $f(x) = 2x - \sin(x)$. נגזור

$$f'(x) = 2 - \cos(x) \geq 0$$

ולכן f עולה. מכאן ש $f(n) = 2n - \sin(n)$ היא סדרה עולה. מכאן ש a_n סדרה יורדת. בנוסף

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-\sin(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{\left(2-\frac{\sin(n)}{n}\right)} = 0$$

כי זה אפסה כפול חסומה.

3. נביט בסדרת הפונקציות $f_n(x) = x^n - x^{2n}$.

(א) קבעו האם סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש בקטע $[0,1]$.

פתרון: נחשב את פונקצית הגבול בקטע. לכל $0 \leq x < 1$ קבוע

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n - x^{2n} = 0 - 0 = 0$$

ועבור $x=1$ נקבל $f_n(1)=1-1=0$ לכן פונקצית הגבול היא $f(x)\equiv 0$.

נבדוק התכנסות במ"ש: נגדיר

$$d_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|x^n - x^{2n}\right| = \sup_{x\in[0,1]} x^n - x^{2n}$$

נגזור את $f_n(x)=x^n-x^{2n}$ לקבל

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}\left(1-2x^n\right)$$

ולכן $f_n'(x)=0$ רק ב $x=0$ או $1-2x^n=0$. כלומר $x=0$ או $x=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. הפונקציה $f_n(x)$ גזירה בקטע ולכן נקודות הקיצון שלה מתקבלות בקצוות או בנקודה שהנגזרת מתאפסת. אצלנו

$$\left\{f_n(0), f_n(1), f_n(\sqrt[n]{\frac{1}{n}})\right\} = \left\{0, 0, \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right\}$$

לכן המינ' של f_n הוא 0 והמקס הוא $\frac{1}{4}$. מכאן ש

$$d_n = \frac{1}{4}$$

שאינו שואף ל 0. מכאן שההתכנסות אינה במ"ש.

(ב) קבעו האם סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש בקטע $[0,\frac{1}{2}]$.

פתרון: כמו מקודם פונקצית הגבול היא $f(x)=0$.

$$d_n = \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \left|x^n - x^{2n}\right| = \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} x^n - x^{2n}$$

וראינו ש f_n' מתאפסת רק ב $x=0$ ו $x=\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. לכן בקטע $[0,\frac{1}{2}]$ הפונקציה מונוטנית וערכי הקיצון מתקבלים בקצוות

$$\left\{f_n(0), f_n(\frac{1}{2})\right\} = \left\{0, \frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}\right\}$$

לכן המקס' של f_n בקטע הוא $\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}$ ולכן

$$d_n = \frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n} \to 0$$

ולכן ההתכנסות במ"ש.