17.7.25

84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – דר' ארז שיינר – פתרון מועד א' – תשפ"ה

משך המבחן: שלוש שעות הוראות: יש לפתור את כל השאלות, משקל כל שאלה 28 נק', כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

שאלה 1 נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x,y,z והפרמטר a, בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} x+4y=a \\ x+a^2y+z=a+1 \\ x+a^2y+az=a+2 \\ (4-a^2)y-z=a^2-2a-1 \end{cases}$$

נתחיל בדירוג ראשוני של המטריצה המייצגת את מערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & a \\ 1 & a^2 & 1 & | & a+1 \\ 1 & a^2 & a & | & a+2 \\ 0 & 4-a^2 & -1 & | & a^2-2a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & a \\ 1 & a^2 & 1 & | & a+1 \\ 0 & 0 & a-1 & | & 1 \\ 0 & 4-a^2 & -1 & | & a^2-2a-1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & a \\ 0 & a^2-4 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & | & 1 \\ 0 & 4-a^2 & -1 & | & a^2-2a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & a \\ 0 & a^2-4 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & a^2-2a \end{pmatrix}$$

א. מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל.

כאשר $a^2-2a\neq 0$ כלומר $a(a-2)\neq 0$ כלומר $a\neq 0,2$ השורה האחרונה היא שורת סתירה, ולכן אין פתרונות.

עבור $a=0$ נציב ונמשיך:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & -4 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, ללא משתנים חופשיים ולכן פתרון יחיד.

עבור $a=2$ נציב ונמשיך:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, עם משתנה חופשי ולכן אינסוף פתרונות.

סה"כ:

$a=0$ פתרון יחיד

$a=2$ אינסוף פתרונות

$a\neq 0,2$ אין פתרונות

ב. מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a=0$.

נמשיך לדירוג קנוני:

$$\begin{pmatrix}1&4&0&|&0\\0&-4&1&|&1\\0&0&-1&|&1\\0&0&0&|&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1+R_2}\begin{pmatrix}1&0&1&|&1\\0&-4&1&|&1\\0&0&-1&|&1\\0&0&0&|&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2+R_3]{R_1+R_3}\begin{pmatrix}1&0&0&|&2\\0&-4&0&|&2\\0&0&-1&|&1\\0&0&0&|&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-R_3]{-\frac{1}{4}R_2}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&|&2\\0&1&0&|&-\frac{1}{2}\\0&0&1&|&-1\\0&0&0&|&0\end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון היחיד הוא

$$\left(2,-\frac{1}{2},-1\right)$$

ג. מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a=2$.

המטריצה שקיבלנו כבר מדוגרת קנונית:

$$\begin{pmatrix}1&4&0&|&2\\0&0&1&|&1\\0&0&0&|&0\\0&0&0&|&0\end{pmatrix}$$

נציב $y=t$ ונקבל

$$x=2-4t$$

$$z=1$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$(2-4t,t,1)=(2,0,1)+t(-4,1,0)$$

<u>שאלה 2</u> תהי העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T(1,0,0)=(1,2,0)$$

$$T(0,1,0)=(2,1,0)$$

$$T(1,1,1)=(3,3,3)$$

א. חשבו את $T(0,0,1)$.

$$T(0,0,1)=T\big((1,1,1)-(1,0,0)-(0,1,0)\big)=T(1,1,1)-T(1,0,0)-T(0,1,0)=$$

$$=(3,3,3)-(1,2,0)-(2,1,0)=(0,0,3)$$

ב. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת $\det([T])$

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

נחשב את הדטרמיננטה לפי השורה השלישית

$$\det([T]) = 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3(1-4) = -9$$

ג. חשבו את $T\big(T(a,b,c)\big)$.

נשתמש במטריצה המייצגת:

$$T\big(T(a,b,c)\big) = [T]^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

נחשב את המטריצה המייצגת בריבוע:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$[T]^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+4b \\ 4a+5b \\ 9c \end{pmatrix}$$

סה"כ

$$T\big(T(a,b,c)\big) = (5a+4b, 4a+5b, 9c)$$

ד. מצאו P הפיכה וD אלכסונית כך ש $D = P^{-1}[T]P$.

ראשית נמצא את הפולינום האופייני

$$p_{[T]}(x) = \det(xI - [T]) = \det\begin{pmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ -2 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 \end{pmatrix} =$$

נחשב את הדטרמיננטה לפי השורה השלישית

$$= (x-3)\cdot\det\begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-1 \end{pmatrix} = (x-3)((x-1)^2-4) = (x-3)(x-1-2)(x-1+2) =$$

$$= (x-3)^2(x+1)$$

ולכן הע"ע הם $\lambda = -1{,}3$

נמצא לכל אחד מהם ו"ע. נתחיל ב$\lambda = 3$

$$V_3 = N(3I - [T]) = N\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נציב $y = t, z = s$ ונקבל $x = t$

$$(t,t,s)=t(1,1,0)+s(0,0,1)$$

כלומר מצאנו שני ו"ע $(1,1,0),(0,0,1)$

עבור הע"ע $\lambda=-1$

$$V_{-1}=N(-I+[T])=N\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&-2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

נציב $y=t$ ונקבל $z=0$, $x=-t$

$$(-t,t,0)=t(-1,1,0)$$

קיבלנו ו"ע נוסף $(-1,1,0)$

לכן סה"כ

$$P=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 3</u> אין קשר בין הסעיפים.

א. מצאו את כל המספרים המרוכבים המקיימים $iz^7=iz$.

$$iz(z^6-1)=0$$

לכן $z=0$ או $z^6=1$

הפתרונות של $z^6=1=cis(0)$ הם

$$z_k=cis\left(\frac{0+2\pi k}{6}\right)$$

עבור $k=0,1,2,3,4,5$

ב. מצאו את כל המספרים המרוכבים $z\in\mathbb{C}$ המקיימים כי $z^2+2iz+1=0$.

$$z_{1,2}=\frac{-2i\pm\sqrt{(2i)^2-4}}{2}=\frac{-2i\pm\sqrt{-8}}{2}=-i\pm\sqrt{-2}=-i\pm\sqrt{2}i=i\left(-1\pm\sqrt{2}\right)$$

ג. נביט בוקטורים $\vec{v}=(1,1,0)$, $\vec{w}=(1,b,c)$. נתון כי הזוית ביניהם היא $\frac{2\pi}{3}$ וכן $|\vec{w}|=\sqrt{18}$.

מצאו את b.

ידוע כי

$$\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}=\cos(\theta)$$

נציב את הוקטורים והנתונים מהשאלה:

$$\frac{(1,1,0)\cdot(1,b,c)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{18}}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\frac{1+b}{6}=-\frac{1}{2}$$

$$1+b=-3$$

$$b=-4$$

<u>שאלה 4</u> בכל אחד מן הסעיפים חשבו את האינטגרל הכפול.

א. $\int_0^1\left(\int_0^2 xe^x dy\right)dx$

ראשית נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^2 xe^x dy=[xe^x y]_0^2=2xe^x$$

כעת נחשב את האינטגרל החיצוני

$$\int_0^1 2xe^x dx=\begin{Bmatrix} f'=e^x & g=2x \\ f=e^x & g'=2\end{Bmatrix}=[2xe^x]_0^1-\int_0^1 2e^x dx=2e-[2e^x]_0^1=2e-(2e-2)=2$$

ב. $\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}(x+y)dx\right)dy$

התחום הוא

$$D=\left\{(x,y)\;\middle|\;\begin{matrix}0\le y\le 1\\ -\sqrt{1-y}\le x\le\sqrt{1-y}\end{matrix}\right\}$$

נשים לב שקצה התחום הוא העקומה $x^2=1-y$ או $y=1-x^2$ (שראינו במספר רב של דוגמאות).

נעביר אותו להצגה לפי x

$$D=\left\{(x,y)\;\middle|\;\begin{matrix}-1\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x^2\end{matrix}\right\}$$

ולכן האינטגרל בשאלה שווה לאינטגרל הבא לאחר החלפת סדר האינטגרציה

$$\int_{-1}^1\left(\int_0^{1-x^2}(x+y)dy\right)dx$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^{1-x^2}(x+y)dy=\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x^2}=x(1-x^2)+\frac{1}{2}(1-x^2)^2=x-x^3+\frac{1}{2}(1-2x^2+x^4)$$

וכעת לאינטגרל החיצוני

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 + x + \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{10} - \frac{2}{3} + \frac{2}{2} = \frac{8}{15}$$

ג. $\iint_D f dxdy$, כאשר $f(x,y) = x^2$ והתחום D הוא $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; \begin{matrix} x^2 + y^2 \le 1 \\ x, y \ge 0 \end{matrix}\right\}$.

נעביר לקואורדינטות קוטביות, כיוון שהתחום הוא רבע המעגל ברביע הראשון.

$$0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos(\theta))^2 r d\theta\right) dr$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos^2(\theta) d\theta = r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x) + 1}{2} d\theta = \frac{r^3}{2}\left[\frac{\sin(2x)}{2} + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^3}{4}$$

כעת נעבור לאינטגרל החיצוני

$$\int_0^1 \frac{\pi}{4} r^3 dr = \left[\frac{\pi r^4}{16}\right]_0^1 = \frac{\pi}{16}$$

דף נוסחאות מתמטיקה ב לכימאים:

<u>מרוכבים:</u>

חיבור וכפל מרוכבים:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

הגדרה:

יהי $z=a+bi\in\mathbb{C}$ נגדיר את <u>הצמוד המרוכב</u> שלו בצורה הקרטזית להיות

$$\overline{z}=a-bi$$

בצורה הגאומטרית (פולארית):

$$\overline{z}=rcis(-\theta)$$

כפל מרוכב בצמוד שלו:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

חילוק מרוכבים:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac+bd+adi+bci}{c^2+d^2}$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

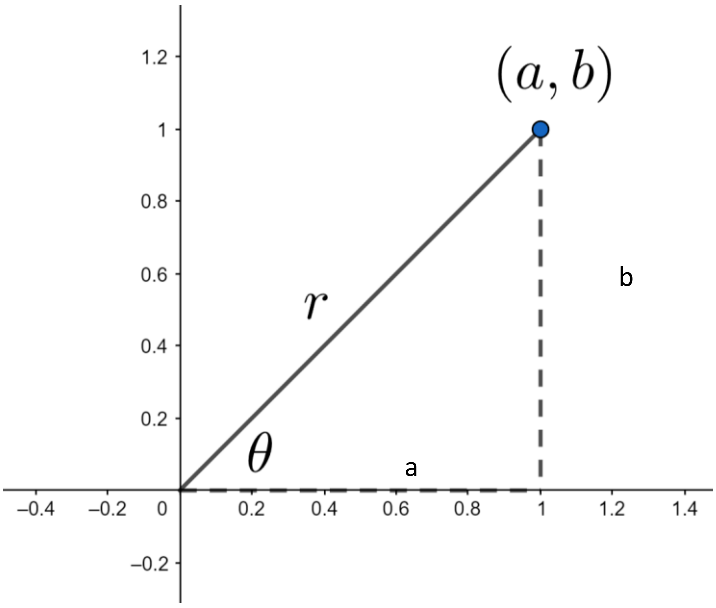
$$\sin(\theta)=\frac{b}{r}$$

$$b=r\cdot sin(\theta)$$

$$\cos(\theta)=\frac{a}{r}$$

$$a=r\cdot\cos(\theta)$$

$$\tan(\theta)=\frac{b}{a}$$



בהנתן r,θ הצורה האלגברית היא:

$$a+bi=r\cos(\theta)+i\,r\sin(\theta)=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))=r\;cis(\theta)$$

כפל מרוכבים בצורה הגאומטרית

$$r_1cis(t_1)\cdot r_2cis(t_2)=r_1r_2(\cos(t_1+t_2)+i\sin(t_1+t_2))=r_1r_2cis(t_1+t_2)$$

משפט דה-מואבר

$$\left(r\;cis(\theta)\right)^n=r^ncis(n\theta)$$

פתרון משוואה מרוכבת אם $a+bi\neq0$ אז יש בדיוק n פתרונות שונים.

$$z^n=a+bi$$

יהי $r\neq0$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי הפתרונות למשוואה

$$z^n = r\,cis(\theta)$$

$$z_k = \sqrt[n]{r}\,cis\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right), k = 0,1,2, \dots, n-1$$

נוסחאת השורשים :

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

יהי V מרחב וקטורי ויהיו $v_1, . . , v_k \in V$ וקטורים במרחב.

אומרים כי V נפרש (נוצר) ע"י הוקטורים $v_1, \dots, v_k$ אם

$$V = \{a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k | a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}$$

סימון: אם המרחב V נפרש ע"י $v_1, \dots, v_k$ רושמים כי

$$V = span\{v_1, \dots, v_k\}$$

פעולה אלגברית בין וקטורים מכפלה סקלרית.

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = ax + by + cz$$

המכפלה הסקלרית של וקטור בעצמו.

$$(x, y, z) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = |(x, y, z)|^2$$

מכפלה סקלרית:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\theta)$$

חישוב זווית בין וקטורים $(\vec{v}, \vec{w} \neq 0)$

$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \cos(\theta)$$

<u>פונקציות לינאריות:</u>

נוסחא:

$$T(x, y, z) = (x, y)$$

הגדרה: פונקציה

$$T: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$$

פונקציה (העתקה) לינארית

$$T(v + w) = T(v) + T(w)$$
$$T(av) = aT(v)$$

כפל מטריצות:

$$\mathbb{F}^{m \times n} \bullet \mathbb{F}^{n \times k} = \mathbb{F}^{m \times k}$$

העתקה שגוזרת פונקציות :

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(cf)' = cf'$$

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מטריצת היחידה $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

כפל במטריצת היחידה הוא כמו לכפול באחד

$$I \cdot A = A \cdot I = A$$

מטריצה הפיכה

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

חישוב דטרמיננטה במטריצה 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

מכפלה הוקטורית

$$|v \times w| = |v| \cdot |w| \cdot \sin(\theta)$$

כיוון הוקטור מאונך לv, w.

חישוב מכפלה סקלרית

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = ax + by + cz$$

הנוסחא למכפלה וקטורית

$$(a, b, c) \times (x, y, z) = (bz - yc, xc - az, ay - bx)$$

נשים לב לדבר הבא: נגדיר מטריצה P שעמודותיה הן הוקטורים העצמיים של המטריצה.

אם יש מספיר וקטורים עצמיים כך שP תהיה ריבועית.

לכסון:

$$D = P^{-1}AP$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{אלכסונית} \\ \text{העע על האלכסון}}} = P^{-1}A \underbrace{P}_{\text{וקטורים עצמיים בעמודות}}$$

הפיכת מטריצות:

1. נשים את המטריצה A ומימינה את מטריצת היחידה I
2. נדרג קנונית עד שמצד שמאל נגיע למטריצת היחידה I (אם בצד שמאל התאפסה שורה, המטריצה אינה הפיכה)
3. מצד ימין תופיע המטריצה ההופכית A^{-1}

חדוא בשני משתנים:

הקשר בין דיפרנציאל ואינטגרל עפ"י הנוסחא של ניוטון לייבניץ

$$\underbrace{\int_a^b f}_{\text{השטח}} = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{הקדומה}}$$

כלל הסנדוויץ'- רציפות פונקציה

$$h(x, y) \leq g(x, y) \leq f(x, y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0y_0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0y_0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0y_0)} f(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

כן רציפה.

גזירות פונקציה:

משוואת מישור דרך נקודה (x_0, y_0, z_0)

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

השיפועים A, B הם הנגזרות החלקיות לפי x, y בנקודה.

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0, y_0) היא

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

<u>אינטגרלים</u>

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ הוא תחום במישור, $f(x,y)$ מודדת את גובה גרף הפונקציה מעל כל נקודה בתחום.

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

נגזרות ואינטגרלים במשתנה אחד.

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(cf)' = cf'$$

$$(fg)' = f'g + g'f$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$\left(f\big(g(x)\big)\right)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x^a = e^{\ln(x^a)} = e^{a\ln(x)}$$

$$(x^a)' = \left(e^{a\ln(x)}\right)' = e^{a\ln(x)} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$y = \ln\left[f(x)\right]$
$y' = c^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln c$	$y = c^{f(x)}$
$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$y = e^{f(x)}$
$y' = n\left[f(x)\right]^{n-1} \cdot f'(x)$	$y = \left[f(x)\right]^n$
$y' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$	$y = \sin(f(x))$
$y' = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$	$y = \cos(f(x))$
$y' = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$	$y = \tan(f(x))$

אינטגרציה בחלקים :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$fg = \int (f'g + fg')$$

$$fg = \int f'g + \int fg'$$

הנוסחא שקוראים לה "אינטגרציה בחלקים":

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

$$\int \arctan(x)\,dx = \begin{Bmatrix} f' = 1 & g = \arctan(x) \\ f = x & g' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{Bmatrix} = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

שיטת ההצבה:

1. מציבים $t = g(x)$
2. גוזרים ולכן $dt = g'(x)dx$
3. מחליפים כל מופע של x ל-t, ואז פותרים את האינטגרל
4. מחזירים את t לשפה של x

הערה: אפשר להתחיל מהצבה "הפוכה" $x = g(t)$ ולהמשיך באופן דומה.

הצבה הפוכה: לחלץ את x *ולהציגו כפונקציה של* t

זהויות:

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

אם יש לנו בית (גרף) שרצפתו היא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ וגובה התקרה נמדד ע"י $f(x,y)$ אזי האינטגרל הכפול מוגדר להיות

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \text{נפח הבית}$$

שינוי קואורדינטות.

$$(x,y) = (r\cos(t), r\sin(t))$$

$$dxdy \to r\,drdt$$

חישוב סקיצה של שטח הרצפה :

1. למצוא את כל נקודות החיתוך בין העקומות
2. בין כל שתי נקודות חיתוך, לראות מי מעל מי על ידי הצבת נקודה

(הסבר: לפי רציפות, בין לבין חיתוכים הפונקציות לא יכולות להחליף מעלה מטה).