בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ"ה, מועד ב' -פתרון

11.9.2025, י"ח באלול התשפ"ה

מרצים: אחיה בר-און, אריאל ויצמן, דן פלורנטין, ארז שיינר.
מתרגלים: יחזקאל אימרה רגב, נמרוד נדבורני, שירה ידעי, הראל רוזנפלד, עידו פלדמן, בוריס גוליקוב, אביתר ישראל שויקה.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

1. (9 נקודות כל סעיף) תהיינה A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הבאים:

(א) אם $C \setminus (A \cup B) = \emptyset$ אז $[(A \cap B) \cup C] \subseteq [A \cap (B \cup C)]$.

פתרון: הפרכה: ניקח

$$B = C = \{1\}, A = \emptyset$$

ונקבל ש $C \setminus (A \cup B) = C \setminus B = \emptyset$ אבל

$$(A \cap B) \cup C = \emptyset \cup C = C$$

אינו מוכל ב $A \cap (B \cup C) = \emptyset \cap (B \cup C) = \emptyset$.

(ב) אם $A \cup C \subseteq B \cup C$ וגם $A \cap C \subseteq B \cap C$ אז $A \subseteq B$.

פתרון: הוכחה: נניח כי $A \cup C \subseteq B \cup C$ ונניח גם $A \cap C \subseteq B \cap C$. צ"ל $A \subseteq B$. יהא $x \in A$ צ"ל $x \in B$. כיון ש $x \in A$ אז $x \in A \cup C$ ולכן מההנחה הראשונה $x \in B \cup C$. אם $x \in B$ סיימנו. אחרת $x \in C$. ואז נקבל $x \in A \cap C$. מההנחה השניה נסיק $x \in B \cap C$ ולכן $x \in B$ וסיימנו.

(ג) אם $(A \triangle B) \cap C = \emptyset$ אז $A \cap C = B \cap C$.

פתרון: הוכחה: נניח $(A \triangle B) \cap C = \emptyset$. צ"ל $A \cap C = B \cap C$. יהא $x \in A \cap C$, צ"ל $x \in B \cap C$. כיוון ש $x \in A \cap C$ נקבל $x \in A$ וגם $x \in C$. נראה ש $x \in B$ ונסיק ש $x \in B \cap C$. נניח בשלילה כי $x \notin B$ אזי $x \in A \setminus B$ ולכן $x \in A \triangle B$. בנוסף $x \in C$ ולכן $x \in (A \triangle B) \cap C$ אבל הנחנו שזוהי קבוצה ריקה. סתירה.

2. (9 נקודות כל סעיף) תהא a_n סדרת מספרים ממשיים (כלומר $a_1, a_2, a_3, \ldots$ מספרים ממשיים) המקיימת

$$0 < a_1 < 1$$

ובנוסף, לכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$.

(א) הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת שלכל מספר $n \geq 1$ טבעי מתקיים $0 < a_n$.

פתרון: הוכחה באינדוקציה:

- בסיס $n = 1$: נתון ש $0 < a_1$.

- צעד: נניח נכונות עבור n כלשהוא (כלומר $0 < a_n$) ונוכיח עבור $n+1$: צ"ל $0 < a_{n+1}$. לפי הגדרה

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

ומכיון ש $a_n > 0$ לפי הנחת האינדוקציה גם $\frac{1}{a_n} > 0$ ולכן $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} > 1 + 0 = 1 > 0$.

(ב) הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת שלכל מספר $n \geq 1$ טבעי מתקיים

$$0 > (-1)^n (a_{n+1} - a_n).$$

פתרון: הוכחה באינדוקציה:

- בסיס $n = 1$: נתון ש $0 < a_1 < 1$. בנוסף $a_2 = 1 + \frac{1}{a_1} > 1$ (ראינו בסעיף הקודם שלכל n, $a_{n+1} > 1$). לכן $a_2 - a_1 > 0$ ולכן

$$(-1)^n (a_2 - a_1) = (-1)(a_2 - a_1) < 0.$$

- צעד: נניח נכונות עבור n כלשהוא (כלומר $0 > (-1)^n (a_{n+1} - a_n)$). ונוכיח עבור $n+1$: צ"ל $0 > (-1)^{n+1} (a_{n+2} - a_{n+1})$ לפי הגדרה

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

$$a_{n+2} = 1 + \frac{1}{a_{n+1}}$$

ולכן

$$(-1)^{n+1} (a_{n+2} - a_{n+1}) = (-1)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{a_{n+1}} - \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)\right) = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) =$$

$$= (-1)^{n+1} \left(\frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1} a_n}\right) = \frac{1}{a_{n+1} a_n} (-1)^n (a_{n+1} - a_n)$$

ואז: כיוון ש $\frac{1}{a_{n+1} a_n} > 0$ (שהרי איברי הסדרה חיובים) ובנוסף $(-1)^n (a_{n+1} - a_n) < 0$ לפי הנחת

האינדוקציה, נקבל שהכפל בניהם שלילי (חיובי כפל שלילי = שלילי). כלומר

$$(-1)^{n+1}\left(a_{n+2}-a_{n+1}\right)=\frac{1}{a_{n+1}a_n}\left(-1\right)^n\left(a_{n+1}-a_n\right)<0$$

כפי שרצינו.

3. (8 נקודות כל סעיף) נגדיר יחס S על $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ כך

$$x_1Sx_2 \iff 0<\frac{x_1}{x_2}\le 1.$$

(א) הוכיחו כי S יחס סדר (חלקי) על $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

פתרון: נוכיח שהוא רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.

- רפלקסיבי: יהא $a\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ טבעי. מתקיים כי $0<\frac{a}{a}=1\le 1$ ולכן aSa.
- אנטי-סימטרי: יהיו $a,b\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ כך ש aSb וגם bSa. צ"ל $a=b$. כיוון ש aSb נסיק כי $0<\frac{a}{b}\le 1$. כיוון ש bSa נסיק כי $0<\frac{b}{a}\le 1$. מכך ש $0<\frac{a}{b}\le 1$ נסיק ש $\frac{b}{a}\ge 1$. בצירוף $0<\frac{b}{a}\le 1$ נקבל $\frac{b}{a}=1$ ולכן $a=b$ כנדרש.
- טרנזיטיבי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ טבעיים כך ש aSb ו bSc. צ"ל aSc. מההנחה נסיק ש $0<\frac{a}{b}\le 1$ וגם $0<\frac{b}{c}\le 1$. הכפל של מספרים חיובים הוא חיובי. הכפל של מספרים קטנים מ 1 (חיובים) גם קטן מ 1 (חיובי) ולכן $0<\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{c}\le 1$. מכאן ש aSc כפי שרצינו.

(ב) הוכיחו או הפריכו: S יחס סדר לינארי.

פתרון: הפרכה: $(1,-1)\notin S$ שהרי $\frac{1}{-1}<0$. מאותו סיבה $(-1,1)\notin S$ ולכן $-1,1$ שני איברים שונים שלא ניתנים להשוואה.

(ג) מצאו את קבוצת האיברים המינימאליים וקבוצת האיברים המקסימאליים ב $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ עם היחס S.

פתרון: טענה: $1,-1$ איברים מינימאלים יחידים.

הוכחה:

- 1 מינימלי: נניח $x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ מקיים $xS1$ צ"ל $x=1$. מכך ש $xS1$ נסיק $0<\frac{x}{1}\le 1$ כלומר x חיובי. כיוון ש x שלם הוא מקיים כי $1\le x$. לכן $1\le\frac{x}{1}$. ומכך שהסקנו ש $\frac{x}{1}\le 1$ נקבל $\frac{x}{1}=1$ ולכן $x=1$ כפי שרצינו.
- -1 מינימלי: נניח $x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ מקיים $xS-1$ צ"ל $x=-1$. מכך ש $xS-1$ נסיק $0<\frac{x}{-1}\le 1$ כלומר x שלילי (כיוון ש $-x$ חיובי). כיוון ש x שלם הוא מקיים כי $x\le -1$. לכן $1\le\frac{x}{-1}$. ומכך שהסקנו ש $\frac{x}{-1}\le 1$

נקבל $\frac{x}{-1}=1$ ולכן $x=-1$ כפי שרצינו.

- כל מספר אחר אינו מינימאלי: נניח $x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ שאינו ±1. אם x חיובי נקבל ש $x\geq 2$ ולכן $0<\frac{1}{x}<1$ ולכן $1Sx$ ומכאן ש x אינו מינמאלי. אם x שלילי אזי $x\leq -2$ ואז $0<\frac{-1}{x}<1$ ולכן $-1Sx$ ומכאן ש x אינו מינמאלי.

טענה: אין איברים מקסימאלים. הוכחה: יהא $x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. אם x חיובי נקבל ש $0<\frac{x}{x+1}<1$ ולכן $xS(x+1)$ ולכן x אינו מקסימאלי. אם x שלילי אזי $0<\frac{x}{x-1}<1$ ולכן $xS(x-1)$ ולכן x אינו מקסימאלי.

4. (7 נקודות כל סעיף) שימו לב: במבחן הזה, 0 אינו מספר טבעי ($0\notin\mathbb{N}$).
נגדיר יחס T על $A=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ על ידי הכלל

$$fTg \iff (f=g)\vee(\exists n\in\mathbb{N}: f^n(1)=1=g^n(1)).$$

כאשר, חזקה n של פונקציה פירושה הרכבה הפונקציה על עצמה n פעמים (למשל $g^3(1)$ שווה ל $g\circ g\circ g(1)$). ענו על הבאים:

(א) הוכיחו כי T יחס שקילות על A.

פתרון: נוכיח שהוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

- רפלקסיבי: תהא $f\in A$. מתקיים כי $f=f$ ולכן aTa.
- סימטרי: תהיינה $f,g\in A$ כך ש fTg. צ"ל gTf. אם $f=g$ סיימנו. אחרת, מכך ש fTg נסיק

$$\exists n\in\mathbb{N}: f^n(1)=1=g^n(1)$$

ולכן

$$\exists n\in\mathbb{N}: g^n(1)=1=f^n(1)$$

ולכן gTf כפי שרצינו.

- טענת עזר: אם $f\in A$ מקיימת $f^n(1)=1$ עבור n טבעי כלשהו אזי לכל m טבעי מתקיים $f^{m\cdot n}(1)=1$.
הוכחת עזר: באינדוקציה על m. בסיס $m=1$: אכן $f^n(1)=1$ (זה ההנחה). צעד: נניח עבור m כלשהוא $f^{m\cdot n}(1)=1$ ונוכיח כי $f^{(m+1)\cdot n}(1)=1$. אכן

$$f^{(m+1)\cdot n}(1)=f^{m\cdot n+n}(1)=f^{m\cdot n}\left(f^n(1)\right)=f^{m\cdot n}\left(1\right)=1$$

כאשר השיוויון האחרון הוא מהנחת האינדוקציה.
כעת נוכיח שהיחס טרנזיטיבי: יהיו $f,g,h\in A$ כך ש fTg ו gTh. צ"ל fTh.
  - אם $f=g$: הנתון gTh פירושו fTh וסיימנו.
  - אם $g=h$: הנתון fTg פירוש fTh וסיימנו.

- אחרת, $f \neq g, g \neq h$: מכך ש fTg ו gTh. נסיק שקיימים m, n טבעיים כך ש

$$f^n(1) = 1 = g^n(1)$$

וגם

$$g^m(1) = 1 = h^m(1)$$

ואז $f^{m \cdot n}(1) = 1$ לפי טענת עזר. עוד מטענת העזר נקבל ש $h^{n \cdot m}(1) = 1$. מכאן ש

$$f^{m \cdot n}(1) = 1 = h^{n \cdot m}(1)$$

ולכן fTh.

(ב) מצאו את עוצמת מחלקת השקילות של הפונקציה הקבועה על 5. כלומר, נגדיר $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ על ידי הכלל $g(n) = 5$, מצאו את עוצמת מחלקת השקילות שלה - $|[g]_T|$. קבעו האם העוצמה סופית, $\aleph_0$, א, $2^{א}$ או אחרת.

פתרון: לפי הגדרת g נקבל שלכל n טבעי

$$g^n(1) = 5 \neq 1$$

ולכן לא קיימת פונקציה $f \in A$ כך ש

$$\exists n \in \mathbb{N} : f^n(1) = 1 = g^n(1)$$

מכאן: אם fTg אז $f = g$ ולכן $[g]_T = \{f \in A \mid fTg\} = \{g\}$ ועוצמת מחלקת השקילות היא 1.

(ג) קבעו את העוצמה של קבוצת המנה $^A/_T$. קבעו האם העוצמה סופית, $\aleph_0$, א, $2^{א}$ או אחרת.

פתרון: טענה: $|^A/_T| = א$.

- מצד אחד: הפונקציה $F : A \to {}^A/_T$ המוגדרת על ידי הכלל $F(f) = [f]_T$ היא על לפי הגדרת קבוצת מנה ולכן

$$|^A/_T| \leq |A| = \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = א\ .$$

- מצד שני: הפונקציה $G : \mathbb{N} \backslash \{1\}^{\mathbb{N}} \to {}^A/_T$ המוגדרת $G(f) = [f]_T$ היא חח"ע. הוכחה: יהיו $f_1, f_2 \in \mathbb{N} \backslash \{1\}^{\mathbb{N}}$

כך ש $G(f_1)=G(f_2)$. צ"ל $f_1=f_2$. כיוון ש $G(f_1)=G(f_2)$ נקבל ש

$$[f_1]_T=[f_2]_T$$

ומכאן ש f_1Tf_2. נניח בשלילה כי $f_1\neq f_2$ ונקבל ש

$$\exists n\in\mathbb{N}: f_1^n(1)=1=f_2^n(1)$$

כעת, אם $n=1$ נקבל $f_1(1)=1$ אבל 1 אינו בתמונה של f_1 סתירה. אם $n>1$ נקבל ש $1=f_1^n(1)=$ $f\left(f^{n-1}(1)\right)$ ושוב קיבלנו ש 1 בתמונה של f_1 (המקור שלו הוא $f^{n-1}(1)$) ושוב סתירה.
קיבלנו ש G חח"ע ולכן

$$\left|\mathbb{N}\backslash\left\{1\right\}^{\mathbb{N}}\right|\leq|{}^{A}/{}_{T}|$$

ומכיוון ש $\aleph=2^{\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph_0}=\left|\mathbb{N}\backslash\left\{1\right\}^{\mathbb{N}}\right|$ נקבל ש $\aleph\leq|{}^{A}/{}_{T}|$.
נשלב את שני הצדדים עם משפט ק.ש.ב לקבל $\aleph=|{}^{A}/{}_{T}|$.

5. (7 נקודות כל סעיף) הגדרה: תת קבוצה A של $\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$ תקרא **מטולטלת** אם

$$\forall x_1,x_2\in A:\ \frac{x_1}{x_2}\in\mathbb{Q}.$$

(א) תהא C שרשרת ביחס ההכלה, של קבוצות מטולטלות (כלומר לכל $A_1,A_2\in C$ מתקיים $A_1\subseteq A_2$ או $A_2\subseteq A_1$).
הוכיחו כי איחוד הקבוצות ב C,

$$Y=\bigcup_{A\in C}A$$

היא קבוצה מטולטלת.

פתרון: יהיו $x_1,x_2\in Y$. צ"ל $\frac{x_1}{x_2}\in\mathbb{Q}$. לפי הגדרת Y קיימים $A_1,A_2\in C$ כך ש $x_1\in A_1, x_2\in A_2$. כיוון ש C שרשרת, מתקיים $A_1\subseteq A_2$ או $A_2\subseteq A_1$. נניח כי $A_1\subseteq A_2$ (אם דווקא $A_2\subseteq A_1$ ההוכחה דומה אם נחליף את התפקידים של A_1 ו A_2). נקבל ש $x_1,x_2\in A_2$ ומכיוון ש A_2 מטולטלת נסיק $\frac{x_1}{x_2}\in\mathbb{Q}$ כנדרש.

(ב) הוכיחו כי קיימת קבוצה מטולטלת S, כך שלכל $0\neq x\in\mathbb{R}\backslash S$ קיים $a\in S$ המקיים $\frac{x}{a}\notin\mathbb{Q}$.

פתרון: נגדיר $S=\mathbb{Q}$. ואכן, לכל $0\neq x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ הוא אי-רציונאלי ולכן $x=\frac{x}{1}\notin\mathbb{Q}$. כיוון ש $1\in S$ קיבלנו קבוצה S שעונה על דרישות השאלה.

(ג) תהא S קבוצה מטולטלת מקסימאלית ביחס להכלה. מצאו את עוצמתה, $|S|$. קבעו האם העוצמה סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת.

פתרון: טענה $|S|=\aleph_0$. הוכחה: $S\neq\emptyset$ (אחרת $\{1\}$ מטולטלת שמכילה אותה ושונה ממנה בסתירה למקס' של S) לכן קיים $a\in S$. נגדיר $f:S\to\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ על ידי $f(x)=\frac{x}{a}$. נשים לב, שלפי הגדרת קבוצה מטולטלת אכן מתקיים $\frac{x}{a}\in\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ (חילוק של מספרים שונה מאפס הוא שונה מאפס) לכל $x\in S$ (שהרי $a\in S$). טענה: f חח"ע +על. הוכחה:

- חח"ע: נניח $f(x_1)=f(x_2)$ צ"ל $x_1=x_2$. מההנחה נקבל $\frac{x_1}{a}=\frac{x_2}{a}$, נכפול ב a ונקבל $x_1=x_2$ כפי שרצינו.
- על: יהא $q\in\mathbb{Q}\backslash\{0\}$. נראה ש $aq\in S$ ואז $f(aq)=\frac{aq}{a}=q$. נניח בשלילה כי $aq\notin S$. אזי $\hat{S}=S\cup\{aq\}$ מכילה את S ושונה ממנה. נראה ש $\hat{S}$ מטלטלת ונקבל סתירה למקסימאליות של S. יהיו $x_1,x_2\in\hat{S}$ צ"ל $\frac{x_1}{x_2}\in\mathbb{Q}$.
  - אם $x_1,x_2\in S$ אזי לפי הגדרת S כקבוצה מטולטלת נקבל $\frac{x_1}{x_2}\in\mathbb{Q}$.
  - אם $x_1,x_2\in\{aq\}$ אזי $x_1=x_2=aq$ ו $\frac{x_1}{x_2}=1\in\mathbb{Q}$.
  - אחרת, $x_2\in S,x_1\in\{aq\}$ (או להיפך ואז ההוכחה דומה). מכאן ש $x_1=aq$ ואז

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{aq}{x_2}=\frac{a}{x_2}\cdot q$$

ומכיוון ש $a,x_2\in S$ נקבל ש $\frac{a}{x_2}\in\mathbb{Q}$. כיוון שגם $q\in\mathbb{Q}$ נקבל ש $\frac{x_1}{x_2}=\frac{a}{x_2}\cdot q\in\mathbb{Q}$ כי כפל של שני מספרים רציונאלים הוא רציונאלי.

קיבלנו ש f חח"ע + על ולכן $|S|=|\mathbb{Q}|=\aleph_0$ כפי שרצינו.