

בדידה (88195) סמסטר קיץ תשפ"ו, בוחן

1. (30 נקודות לכל סעיף) תהי A קבוצה.
 א. אומרים ש $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ קבוצה סופית ולא ריקה כך ש $\mathcal{F} \neq \{\emptyset\}$ סגורה לאיחוד אם לכל $X, Y \in \mathcal{F}$ מתקיים ש $X \cup Y \in \mathcal{F}$.
הוכיחו או הפריכו: לכל $\mathcal{F}$ סגורה לאיחוד קיים איבר $x \in \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$ כך ש $|\{X \in \mathcal{F} | x \in X\}| \geq \frac{|\mathcal{F}|}{2}$.
 ב. כעת נניח כי $|A| = n$. אומרים ש $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ היא חותכת אם לכל $X, Y \in \mathcal{F}$ מתקיים ש $X \cap Y \neq \emptyset$.
הוכיחו או הפריכו: בהינתן $\mathcal{F}$ המקיימת $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$ חותכת קיים $x \in A$ כך שלכל X, Y, Z מתקיים ש:

$$x \in X \cap Y \cap Z$$

3. (30 נקודות לכל סעיף) תהי A קבוצה בגודל n . נסמן $X = \mathcal{P}(A \times A)$. יהי $R \in X$. נגדיר את הסגור הטרנזיטיבי של R (נסמנו ב R^+) המקיימת:

$$1. R^+ \text{ טרנזיטיבי.}$$

$$2. R \subseteq R^+$$

$$3. \text{ לכל } S \in X \text{ כך ש } S \text{ טרנזיטיבי וגם } R \subseteq S \text{ מתקיים ש } R^+ \subseteq S.$$

נגדיר יחס שקילות P על X באופן הבא:

$$R_1 P R_2 \iff R_1^+ = R_2^+$$

א. **הוכיחו** כי P יחס שקילות.

ב. **חשבו** את $|X/P|$.