

תשפ"ב, מועד א' - פתרון

1. פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת מדרגה אם

$$\exists x_1 \in \mathbb{R} \forall x_2 \in \mathbb{R} (x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) < f(x_2))$$

פתרון:

לפני הסעיפים נכתוב מה זה אומר שפונקציה אינה מדרגה ואז נחליט אלו מבין הפסוקים הוא נכון (זה שמגדיר מדרגה או זה שמגדיר אינה מדרגה)

$$\begin{aligned} \neg [\exists x_1 \in \mathbb{R} \forall x_2 \in \mathbb{R} (x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) < f(x_2))] &\equiv \\ \forall x_1 \in \mathbb{R} \exists x_2 \in \mathbb{R} \neg [(x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) < f(x_2))] &\equiv \\ \forall x_1 \in \mathbb{R} \exists x_2 \in \mathbb{R} (x_1 < x_2) \wedge (f(x_1) \geq f(x_2)) \end{aligned}$$

(א) האם $f(x) = \sin(x)$ מדרגה?

פתרון:

צריך לראות איזה מבין הפסוקים הבאים נכון לפונקציה שלנו

$$\exists x_1 \in \mathbb{R} \forall x_2 \in \mathbb{R} (x_1 < x_2) \rightarrow (\sin(x_1) < \sin(x_2))$$

$$\forall x_1 \in \mathbb{R} \exists x_2 \in \mathbb{R} (x_1 < x_2) \wedge (\sin(x_1) \geq \sin(x_2))$$

נראה שהפסוק האדום נכון (במילים: לכל ערך x_1 יש ערך גדול ממנו x_2 בו $\sin$ קטנה שווה).

יהא $x_1 \in \mathbb{R}$ וצריך למצוא $x_2 \in \mathbb{R}$ המקיים

$$(x_1 < x_2) \wedge (\sin(x_1) \geq \sin(x_2))$$

אכן נגדיר $x_2 = x_1 + 2\pi$. ברור ש $x_1 < x_2$ ומתקיים

$$\sin(x_1) = \sin(x_1 + 2\pi) = \sin(x_2)$$

(ב) האם $f(x) = -x^2$ מדרגה?

פתרון:

צריך לראות איזה מבין הפסוקים הבאים נכון לפונקציה שלנו

$$\exists x_1 \in \mathbb{R} \forall x_2 \in \mathbb{R} (x_1 < x_2) \rightarrow -(x_1)^2 < -(x_2)^2 \equiv$$

$$\exists x_1 \in \mathbb{R} \forall x_2 \in \mathbb{R} (x_1 < x_2) \rightarrow ((x_2)^2 < (x_1)^2)$$

$$\forall x_1 \in \mathbb{R} \exists x_2 \in \mathbb{R} (x_1 < x_2) \wedge -(x_1)^2 \geq -(x_2)^2 \equiv$$

$$\forall x_1 \in \mathbb{R} \exists x_2 \in \mathbb{R} (x_1 < x_2) \wedge ((x_2)^2 \geq (x_1)^2)$$

נראה שהפסוק האדום נכון. יהא $x_1 \in \mathbb{R}$ צריך למצוא x_2 המקיים

$$(x_1 < x_2) \wedge ((x_2)^2 \geq (x_1)^2)$$

נבחר $x_2 = |x_1| + 1$. ברור ש $x_2 = |x_1| + 1 = x_2$ ובונוס

$$(x_2)^2 = (|x_1| + 1)^2 = |x_1|^2 + 2|x_1| + 1 \geq |x_1|^2 = (x_1)^2$$

(ג) אם f מדרגה, האם $g(x) = f(x+2)$ גם מדרגה?

פתרון:

הוכחה:

נתון כי

$$\exists x_1 \in \mathbb{R} \forall x_2 \in \mathbb{R} (x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) < f(x_2))$$

וצריך להוכיח

$$\exists x_1 \in \mathbb{R} \forall x_2 \in \mathbb{R} (x_1 < x_2) \rightarrow (g(x_1) < g(x_2))$$

$$\exists x_1 \in \mathbb{R} \forall x_2 \in \mathbb{R} (x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1 + 2) < f(x_2 + 2))$$

$$\exists a_1 \in \mathbb{R} \forall a_2 \in \mathbb{R} (a_1 < a_2) \rightarrow (f(a_1 + 2) < f(a_2 + 2))$$

אכן: נבחר $a_1 = x_1 - 2$ וצריך להראות כי

$$\forall a_2 \in \mathbb{R} (a_1 < a_2) \rightarrow (f(a_1 + 2) < f(a_2 + 2))$$

יהא a_2 צ"ל

$$(a_1 < a_2) \rightarrow (f(a_1 + 2) < f(a_2 + 2))$$

נניח $a_1 < a_2$ וצ"ל

$$f(a_1 + 2) < f(a_2 + 2)$$

נסמן $x_2 = a_2 + 2$ ונקבל ש $x_1 < x_2$. לפי הנתון מתקיים $f(x_1) < f(x_2)$ שבלשון של a ים זה

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$$f(a_1 + 2) < f(a_2 + 2)$$

וזה מה שרצינו להוכיח.

2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים כי אם $C \subseteq A \setminus B$ אזי $C \cap A \subseteq C \cap B$.

פתרון:

הפרכה: $B = \emptyset, A = \{1\}, C = A \setminus B = A$ ואז מתקיים

$$C \subseteq A \setminus B$$

אבל $C \cap B = \emptyset$ לא מוכל ב $C \cap A = A \cap A = A = \{1\}$.

(ב) לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים כי אם $C \subseteq A \setminus B$ אזי $C \cap B \subseteq C \cap A$.

פתרון:

הוכחה: יהיו A, B, C קבוצות.

נניח $C \subseteq A \setminus B$ צ"ל $C \cap B \subseteq C \cap A$.

יהא $x \in C \cap B$ צ"ל $x \in C \cap A$.

מתקיים $x \in C$ וגם $x \in B$ ורוצים להראות ש $x \in C$ וגם $x \in A$.

מתקיים $x \in C$ ונותר להראות ש $x \in A$.

מכך ש $C \subseteq A \setminus B$ ו $x \in C$ נסיק ש $x \in A \setminus B$ כלומר $x \in A$ וגם $x \notin B$ בפרט $x \in A$ כפי שרצינו להוכיח.

הערה: נשים לב למה שאורית אומרת (הוכחה נוספת):

בהנחה ש $C \subseteq A \setminus B$ זה אומר שאין איברים שהם גם ב C וגם ב B . בעצם

$$C \cap B = \emptyset$$

שהיא מוכלת בכל קבוצה ובפרט ב $C \cap A$.

(ג) לכל שתי קבוצות A, B מתקיים כי אם $A \subseteq B$ אם ורק אם $P(A) \subseteq P(B)$.

פתרון:

הוכחה: יהיו A, B קבוצות. צ"ל $A \subseteq B$ אם ורק אם $P(A) \subseteq P(B)$. נוכיח:

כיוון ראשון: נניח $A \subseteq B$ צ"ל $P(A) \subseteq P(B)$.

תהא $X \in P(A)$ צ"ל $X \subseteq A$.

$X \in P(A)$ זה אומר ש $X \subseteq A$. בנוסף מניחים ש $A \subseteq B$ ולכן

$$X \subseteq A \subseteq B$$

לכן $X \subseteq B$ (טרנזיטיביות של הכללה) ולכן $X \in P(B)$ כפי שרצינו.

כיוון שני: נניח $P(A) \subseteq P(B)$ צ"ל $A \subseteq B$.

יהא $x \in A$ צ"ל $\{x\} \in P(A)$. כיוון ש $x \in A$ נקבל ש $\{x\} \subseteq A$ או $\{x\} \in P(A)$.

מההנחה נסיק ש $\{x\} \in P(B)$ לכן $\{x\} \subseteq B$ לכן $x \in B$ כפי שרצינו.
 דרך נוספת יותר מתחכמת אבל יותר קשה לחשוב עליה היא: $A \subseteq A$ לכן $A \in P(A)$ לכן $A \in P(B)$ לכן $A \subseteq B$.

3. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \geq 5$ מתקיים $2^n > n(n+1)$.

פתרון:

- בסיס: עבור $n = 5$ אכן מתקיים $2^5 = 32 > 30 = 5(5+1)$.
- צעד: נניח שעבור $n \geq 5$ מסוים מתקיים $2^n > n(n+1)$. נוכיח עבור $n+1$:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n > n(n+1) + n(n+1) = 2n(n+1)$$

(המעבר האדום מהנחת האינדוקציה). כיוון ש $n \geq 5$ נקבל ש $2n = n+n > n+2$ וסה"כ קיבלנו

$$2^{n+1} > 2n(n+1) > (n+2)(n+1)$$

כפי הנדרש.

4. תהיינה שתי פונקציות $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם f חח"ע וכן g על אז $f \circ g$ חח"ע.

פתרון:

הפרכה: $f(n) = n$ ו $g(n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.
 טענה g על. הוכחה: יהא b כלשהוא. אם $b = 2k$ מספר זוגי (עבור k טבעי כלשהוא) המקור שלו יהי $4k-1$ שהרי

$$g(4k-1) = \lfloor \frac{4k-1+1}{2} \rfloor = \lfloor 2k \rfloor = 2k$$

ואם $b = 2k-1$ אי זוגי (עבור k טבעי כל שהוא), המקור שלו $4k-2$

$$g(4k-2) = \lfloor \frac{4k-2+1}{2} \rfloor = \lfloor 2k - \frac{1}{2} \rfloor = 2k-1$$

ומתקיים כי

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = g(n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$$

שאינה חח"ע שהרי $(f \circ g)(1) = 1 = (f \circ g)(2)$.

(ב) אם f חח"ע וכן g על אז $f \circ g$ חח"ע.

פתרון:

הפרכה: $f(n) = n$ ו $g(n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. מסעיף קודם. נקבל

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$$

אינה חח"ע.

(ג) אם f אינה חח"ע וכן g על אז $f \circ g$ אינה חח"ע.

פתרון:

הוכחה: נניח f אינה חח"ע ו g על. צ"ל: $f \circ g$ אינה חח"ע. כיוון ש f אינה חח"ע קיימים $n \neq m$ כך ש $f(n) = f(m)$. כיוון ש g על קיימים a, b כך ש $g(a) = n, g(b) = m$. כיוון ש $n \neq m$ גם $a \neq b$ (אחרת זאת לא פונקציה). סה"כ נקבל

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(n) = f(m) = f(g(b)) = (f \circ g)(b)$$

מה שמראה ש $f \circ g$ אינה חח"ע.

5. בכמה דרכים ניתן לחלק 10 שקלים ל 4 ילדים כך ש:

(א) כל ילד יקבל לפחות שקל אחד.

פתרון:

נחלק לכל ילד שקל ונשאר עם 6 שקלים שצריך לחלק ל 4 ילדים. זה שקול למספר הפתרונות האי-שלילים השלמים של המשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$\text{שזה } \binom{3+6}{6}$$

(ב) בדיוק ילד אחד לא יקבל שקלים וכל שאר הילדים יקבלו לפחות שקל אחד.

פתרון:

נבחר ילד אחד שלא יקבל (מספר האפשרויות $\binom{4}{1} = 4$) ונחלק לשלושת האחרים שקל. ישאר לנו 7 שקלים לחלק ל 3 ילדים. זה שקול למספר הפתרונות האי-שלילים השלמים של המשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

שזה $\binom{2+7}{7}$. סה"כ לתרגיל יש $4 \cdot \binom{2+7}{7}$ אפשרויות.

(ג) יהיו שני ילדים שיקבלו בדיוק 3 שקלים כל אחד.

פתרון:

נחלק למקרים:

- שני ילדים בדיוק מקבלים 3 שקלים: נבחר שני ילדים שיקבלו בדיוק 3 שקלים (מספר האפשרויות $\binom{4}{2} = 6$) ונחלק לשני האחרים את $10 - 6 = 4$ השקלים הנותרים. האפשרות הן 2 לכל אחד או 4 לאחד ו 0 לשני (אחרת יהיו 3 ילדים עם 3 שקלים). סה"כ 3 אפשרויות לחלק לשני הילדים הנוספים וסה"כ למקרה זה $6 \cdot 3 = 18$.
- שלוש ילדים בדיוק מקבלים 3 שקלים: נבחר $\binom{4}{3} = 4$ וילד הרביעי ניתן את השקל שנשאר.
- אין עוד מקרים - אין אפשרות ש 4 ילדים יקבלו 3 שקלים..

סה"כ לסעיף זה: $18 + 4 = 22$