

האינטגרל המסוים

תזכורת (האינטגרל המסוים לפי סכומי רימן)

יהי $[a, b]$ ותהי f פונקציה.

תהי $P := a = x_0 < \dots < x_k = b$ חלוקה של $[a, b]$ ו- $d_1 \in [x_0, x_1], \dots, d_k \in [x_{k-1}, x_k]$

נסמן: $\Delta_1 := x_1 - x_0, \dots, \Delta_k := x_k - x_{k-1}$ ו- $\lambda(P) = \max\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$

אז:

$$\sigma(P) := \sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot f(d_i) \xrightarrow{\lambda(P) \rightarrow 0} I := \int_a^b f(x)$$

הסכומים של דרבו (Darboux)

הגדרה

תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a, b]$.

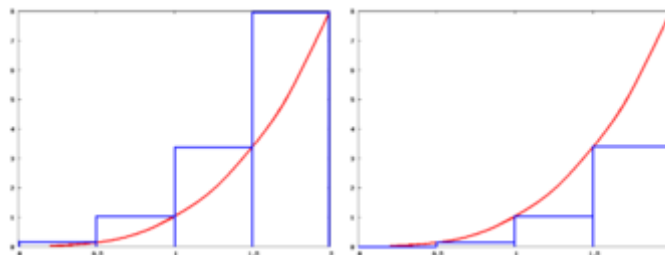
תהי $P := a = x_0 < \dots < x_k = b$ חלוקה של $[a, b]$.

נגדיר לכל $1 \leq i \leq k$: $\alpha_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ ו- $\beta_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

נגדיר:

$$\bar{\sigma}(P) := \sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot \beta_i$$

$$\underline{\sigma}(P) := \sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot \alpha_i$$



למה

תהי P חלוקה של $[a, b]$.

אזי:

$$\begin{aligned} \underline{s}(P) &= \inf\{\sigma(\tilde{P})\} \\ \bar{s}(P) &= \sup\{\sigma(\tilde{P})\} \end{aligned}$$

כאשר \tilde{P} חלוקה מנוקדת המתקבלת מבחירת נקודות בקטעי החלוקה P .

הוכחה

תהי \tilde{P} כנייל.

טענה: $\underline{s}(P) \leq \sigma(\tilde{P})$.

הוכחה: לכל $1 \leq i \leq k$: $\alpha_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq f(d_i)$ לכן:

$$\underline{s}(P) = \sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot \alpha_i \leq \sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot f(d_i) = \sigma(\tilde{P})$$

□

לכן, הקבוצה $\{\sigma(\tilde{P})\}$ חסומה מלמעלה, לכן קיים לה אינפימום.

בנוסף:

$$\underline{s}(P) = \sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot \alpha_i \leq \sigma(\tilde{P})$$

לכל \tilde{P} , לכן $\underline{s}(P)$ חסם מלמעלה.

נוכיח כי $\underline{s}(P)$ האינפימום.

יהי $\varepsilon > 0$.

נרצה למצוא חלוקה מנוקדת \tilde{P} , כך ש: $\sigma(\tilde{P}) < \underline{s}(P) + \varepsilon$.

נגדיר :

$$\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{b-a}$$

אז :

$$\sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot (\alpha_i + \tilde{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot \alpha_i + \sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot \tilde{\varepsilon} = \underline{s}(P) + \tilde{\varepsilon} \cdot (b-a) = \underline{s}(P) + \varepsilon$$

עפ"י הגדרת האינפימום, לכל $1 \leq i \leq k$, קיים $f(d_i) \in \{f(x) : x \in [x_{i+1}, x_i]\}$ כך ש :

$$f(d_i) < \alpha_i + \tilde{\varepsilon}$$

נקבל חלוקה מנוקדת : $\tilde{P} : d_i \in [x_0, x_1], \dots, d_k \in [x_{k-1}, x_k]$ אז :

$$\sigma(\tilde{P}) = \sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot f(d_i) < \sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot (\alpha_i + \tilde{\varepsilon}) = \underline{s}(P) + \varepsilon$$

לכן :

$$\underline{s}(P) = \inf\{\sigma(\tilde{P})\}$$

ההוכחה עבור $\bar{s}(P)$ באופן דומה.

■

הגדרה

חלוקה P_1 של $[a, b]$ היא עידון של חלוקה P_2 של $[a, b]$ אם $P_2 \subseteq P_1$.

למה

אם \tilde{P} עידון של P , אז :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{s}(P) \geq \bar{s}(\tilde{P}) \\ \underline{s}(P) \leq \underline{s}(\tilde{P}) \end{array}}$$

לכן, החסמים הופכים הדוקים יותר ככל שמעדינים את החלוקה.

הוכחה

נוכיח הטענה כאשר \tilde{P} מתקבלת מ- P ע"י הוספת נקודה אחת.

עידון כללי $\tilde{P} \subset P$ מתקבל מ- P ע"י סדרה סופית של עידונים ע"י הוספת נקודה אחת בכל פעם. עבור שוויון הטענה טריוויאלית.

תהי $P := x_0 < \dots < x_k$ חלוקה של $[a, b]$.

נניח ש- \tilde{P} חלוקה של $[a, b]$ המתקבלת מ- P ע"י הוספת נקודה כלשהי y .

יהי $j \in \{1, \dots, k\}$ כך ש: $x_{j-1} < y < x_j$.

נסמן:

$$\beta_{j,0} := \sup\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq y\} ; \beta_{j,1} := \sup\{f(x) : y \leq x \leq x_j\}$$

אזי:

$$\bar{s}(P) = \sum_{i \neq j} \Delta_i \cdot \beta_i + \Delta_j \cdot \beta_j$$

$$\bar{s}(\tilde{P}) = \sum_{i \neq j} \Delta_i \cdot \beta_i + (y - x_{j-1}) \cdot \overset{\leq \beta_j}{\widetilde{\beta}_{j,0}} + (x_j - y) \cdot \overset{\leq \beta_j}{\widetilde{\beta}_{j,1}}$$

$$\bar{s}(\tilde{P}) \leq \sum_{i \neq j} \Delta_i \cdot \beta_i + (y - x_{j-1} + x_j - y) \cdot \beta_j$$

$$\bar{s}(\tilde{P}) \leq \sum_{i \neq j} \Delta_i \cdot \beta_i + \Delta_j \cdot \beta_j$$

$$\bar{s}(\tilde{P}) \leq \bar{s}(P)$$

ההוכחה עבור $\underline{s}(P)$ באופן דומה.

■

למה

אם חלוקה \tilde{P} של $[a, b]$ מתקבלת מחלוקה P של $[a, b]$ ע"י הוספת m נקודות, אז:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{s}(P) &\leq \bar{s}(\tilde{P}) + m \cdot \lambda(P) \cdot \omega \\ \underline{s}(P) &\geq \underline{s}(\tilde{P}) - m \cdot \lambda(P) \cdot \omega \end{aligned}}$$

כאשר :

$$\omega := \sup_{x \in [a,b]} f(x) - \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

הוכחה

נוכיח באינדוקציה על m .

בסיס : $m = 1$.

בסימוני ההוכחה הקודמת :

$$\bar{s}(P) - \bar{s}(\tilde{P}) = \overset{x_j - y + y - x_{j-1}}{\tilde{\Delta}_j} \cdot \beta_j - (y - x_{j-1}) \cdot \beta_{j,0} - (x_j - y) \cdot \beta_{j,1}$$

$$\bar{s}(P) - \bar{s}(\tilde{P}) = (y - x_{j-1}) \cdot \overbrace{(\beta_j - \beta_{j,0})}^{\leq \beta_j - \alpha_j \leq \omega} + (x_j - y) \cdot \overbrace{(\beta_j - \beta_{j,1})}^{\leq \beta_j - \alpha_j \leq \omega}$$

$$\bar{s}(P) - \bar{s}(\tilde{P}) \leq (y - x_{j-1}) \cdot \omega + (x_j - y) \cdot \omega$$

$$\bar{s}(P) - \bar{s}(\tilde{P}) \leq \overbrace{(x_j - x_{j-1})}^{=\Delta_j} \cdot \omega$$

$$\bar{s}(P) - \bar{s}(\tilde{P}) \leq \lambda(P) \cdot \omega$$

צעד : $m > 1$.

נניח כי \tilde{P} מתקבלת מ- P ע"י הוספת m נקודות.

$$| \tilde{P} \setminus P | = m - 1, | \tilde{P} \setminus \tilde{P} | = 1 : \text{ש } P \subseteq \tilde{P} \subseteq \tilde{P}$$

עפ"י הנחת האינדוקציה :

$$\bar{s}(P) - \bar{s}(\tilde{\tilde{P}}) \leq (m - 1) \cdot \lambda(P) \cdot \omega$$

$$\bar{s}(\tilde{\tilde{P}}) - \bar{s}(\tilde{P}) \leq 1 \cdot \lambda(\tilde{\tilde{P}}) \cdot \omega \leq 1 \cdot \lambda(P) \cdot \omega$$

↓

$$\bar{s}(P) - \bar{s}(\tilde{P}) \leq m \cdot \lambda(P) \cdot \omega$$

■

הערה

לכל שתי חלוקות P, \tilde{P} של $[a, b]$, מתקיים:

$$\underline{s}(P) \leq \bar{s}(\tilde{P})$$

הוכחה

החלוקה $P \cup \tilde{P}$ של $[a, b]$ מעדנת את P ואת \tilde{P} .

לכן:

$$\underline{s}(P) \leq \underline{s}(P \cup \tilde{P}) \leq \bar{s}(P \cup \tilde{P}) \leq \bar{s}(\tilde{P})$$

■

הערה

$$\beta := \sup_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{ו} \quad \alpha := \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

אזי:

$$\alpha \cdot (b - a) = \sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot \alpha \leq \sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot \alpha_i = \underline{s}(P) \leq \bar{s}(P) = \sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot \beta_i \leq \sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot \beta = \beta \cdot (b - a)$$

בפרט, הקבוצות $\{\underline{s}(P)\}$ ו- $\{\bar{s}(P)\}$ חסומות.

הגדרה

בהמשך לסימונים הנ"ל, נגדיר:

$$\underline{I} := \inf\{\underline{s}(P)\}$$

$$\bar{I} := \sup\{\bar{s}(P)\}$$

\underline{I} = האינטגרל התחתון של זרבו.

$\bar{I} =$ האינטגרל העליון של דרבו.

כיוון ש: $\underline{s}(P) \leq \bar{s}(\tilde{P})$, אז: $\underline{s}(P) \leq \bar{I}$, לכן: $\underline{I} \leq \bar{I}$.

■