תרגילים ממבחנים ופתרונותיהם

1 בפברואר 2016

1. (מבחן תשנ"ה)

א. כתבו נוסחת טיילור בנקודה $(0,0)$ לפונקציה $f(x,y)=\frac{1}{1-xy}$ עד סדר 8. הראו שהשארית היא אכן $o\left(\|(x,y)\|^8\right)$.

ב. באמצעות סעיף א', מצאו את $\frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}(0,0)$.

ג. באמצעות סעיף א' מצאו את $\frac{\partial^6 f}{\partial x^2 \partial y^4}(0,0)$.

פתרון:

א. קיימת סביבה של $(0,0)$ שבה $|xy|<1$ ולכן:

$$\frac{1}{1-xy}=\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n$$

לפי נוסחת סכום סדרה הנדסית.

אנו מעוניינים בפיתוח עד סדר 8 ולכן נבחר $n=4$. כלומר:

$$\frac{1}{1-xy}=\sum_{n=0}^{4}(xy)^n+\sum_{n=5}^{\infty}(xy)^n$$

נותר לנו להראות שאכן $\sum_{n=5}^{\infty}(xy)^n=o\left(\|(x,y)\|^8\right)$, כלומר:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{\sum_{n=5}^{\infty}(xy)^n}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^8}=0$$

אם נעבור לקואורדינטות פולריות, נקבל:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{\sum_{n=5}^{\infty}(xy)^n}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^8}=\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{\sum_{n=5}^{\infty}r^{2n}\cos^n\theta\sin^n\theta}{r^8}=\lim_{r\longrightarrow 0}\sum_{n=5}^{\infty}\frac{r^{2n}\cos^n\theta\sin^n\theta}{r^8}$$

כעת:

$$0\le\left|\sum_{n=5}^{\infty}\frac{r^{2n}\cos^n\theta\sin^n\theta}{r^8}\right|\le\sum_{n=5}^{\infty}\left|\frac{r^{2n}}{r^8}\right|=\sum_{n=5}^{\infty}\frac{r^{2n}}{r^8}=\frac{1}{r^8}\cdot\sum_{n=5}^{\infty}r^{2n}=\frac{1}{r^8}\cdot\frac{r^{10}}{1-r^2}$$

במעבר השני השתמשנו בא"ש המשולש ובשיוויון האחרון בסכום סדרה הנדסית. נקבל:

$$= \frac{r^2}{1-r^2} \longrightarrow 0$$

כאשר $r \longrightarrow 0$ ולכן לפי כלל הסנדוויץ' הוכחנו את הדרוש.
ב. הפיתוח הוא:

$$\frac{1}{1-xy} \approx 1 + xy + x^2y^2 + x^3y^3 + x^4y^4$$

לכן, $\frac{1}{4!\cdot 4!}\frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}(0,0) = 1$, כלומר $\frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}(0,0) = 4! \cdot 4!$.
ג. האיבר x^2y^4 לא מופיע בפיתוח ולכן $\frac{\partial^6 f}{\partial x^2 \partial y^4}(0,0) = 0$.

2. (מבחן תשס"ד)
כתבו פיתוח טיילור של הפונקציה $f(x,y) = \sin(xe^y)$ מסדר 2 סביב הנקודה $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
<u>פתרון:</u>
נחשב את הנגזרות:

$$f_x = e^y \cos(xe^y), f_y = xe^y \cos(xe^y)$$

ובנקודה נקבל: $f_y\left(\frac{\pi}{2},0\right) = f_x\left(\frac{\pi}{2},0\right) = 0$.
נחשב את הנגזרות השניות:

$$f_{xx} = -e^{2y}\sin(xe^y), f_{xy} = e^y\cos(xe^y) - xe^{2y}\sin(xe^y), f_{yy} = x\left(e^y\cos(xe^y) - xe^{2y}\sin(xe^y)\right)$$

ובנקודה נקבל: $f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = -1, f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = -\frac{\pi}{2}, f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = -\frac{\pi^2}{4}$.
אם כן, הפיתוח הוא:

$$f \approx 1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{4}y^2 - \pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)y$$

כאשר 1 הוא ערך הפונקציה בנקודה.

3. (מבחן תשע"ה)
תהי:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

א. מצאו את $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
ב. האם f דיפרנציאבילית ב־$(0,0)$?
<u>פתרון:</u>

א. נחשב לפי ההגדרה, כמובן:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\frac{t^3+0^4}{t^2+0^2}-0}{t}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\frac{0+t^4}{0+t^2}-0}{t}=0$$

ואלו הן הנגזרות.

ב. כדי שהפונקציה תהיה דיפרנציאבילית ב־ $(0,0)$, נדרוש:

$$f(h_1,h_2)=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,h_2+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

כלומר (אחרי שנציב את מה שחישבנו בסעיף א'):

$$\frac{h_1^3+h_2^4}{h_1^2+h_2^2}=h_1+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

ולכן, השאלה היא האם:

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{\frac{h_1^3+h_2^4}{h_1^2+h_2^2}-h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_2^4-h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

במסלול $h_1=h_2^2$ נקבל 0 (המונה מתאפס).

במסלול $h_1=h_2$ נקבל:

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_2^4-h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{h_1\longrightarrow 0}\frac{h_1^4-h_1^3}{(2h_1^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{h_1\longrightarrow 0}\frac{h_1^3(h_1-1)}{\sqrt{8}h_1^3}=\lim_{h_1\longrightarrow 0}\frac{h_1-1}{\sqrt{8}}=-\frac{1}{\sqrt{8}}$$

קיבלנו גבולות שונים במסלולים שונים, ולכן הגבול לא קיים (ובפרט אינו 0).
שימו לב שמספיק היה לקחת את המסלול השני ולהראות שהגבול שלו אינו 0.
לכן הפונקציה אינה דיפרנציאבילית.

4. (מבחן תשס"ב)

מצאו את כל הנקודות a על המשטח $M=\left\{z=x^2+y^2\right\}$ כך שהמישור המשיק $T_a(M)$ מקביל למישור $x+2y+z=9$.

כתבו את משוואת המישור המשיק בנקודות אלו.

<u>פתרון:</u>

המשטח הוא מהצורה $f(x,y)=z=x^2+y^2$ ולכן המישור המשיק לנקודה כללית במשטח (x_0,y_0,z_0) הוא מהצורה:

$$0=f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)-(z-z_0)$$

הנגזרות הן $f_x = 2x$, $f_y = 2y$ (וגם $f_z = -1$) ועל המשטח $z_0 = x_0^2 + y_0^2$ ולכן:

$$2x_0 x + 2y_0 y - z - x_0^2 - y_0^2 = 0$$

כעת, למישורים מקבילים נורמלים תלויים ליניארית, כלומר:

$$(2x_0, 2y_0, -1) = t \cdot (1, 2, 1)$$

נפתור את המשוואות:

$$\begin{cases} 2x_0 = t \\ 2y_0 = 2t \\ -1 = t \end{cases}$$

ונקבל $x_0 = -\frac{1}{2}, y_0 = -1$ ולכן $z_0 = \frac{5}{4}$, כלומר הנקודה היא:

$$a = \left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{5}{4}\right)$$

ובנקודה זו:

$$T_a(M) : -x - 2y - z - \frac{5}{4} = 0$$

5. (מבחן תשס"ה)
בנקודה $a = (1,1,1)$, באיזה כיוון הפונקציה

$$f(x,y,z) = x \arctan(yz)$$

עולה בקצב הגדול ביותר? הגדירו וקטור זה ע"י וקטור שאורכו 1.
כמו כן, חשבו את הנגזרת של f בנקודה a בכיוון זה.
פתרון:
הנגזרות החלקיות של f הן:

$$f_x = \arctan(yz)$$

$$f_y = \frac{xz}{1 + (yz)^2}$$

$$f_z = \frac{yx}{1 + (yz)^2}$$

הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בכל נקודה ולכן f דיפרנציאבילית.

כעת, כיוון העלייה המקסימלי הוא כיוון הגרדיאנט המנורמל. הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f(1,1,1) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

ולכן וקטור הכיוון של העלייה המקסימלית מאורך 1 יהיה:

$$h = \frac{\nabla f(1,1,1)}{\|\nabla f(1,1,1)\|} = (0.743, 0.473, 0.473)$$

ומכיוון שהפונקציה דיפרנציאבילית, הנגזרת הכיוונית בכיוון זה תהיה:

$$D_h f(a) = \nabla f(1,1,1) \cdot h = 1.056$$

6. (מבחן תשנ"ז)
מצאו את $dg_a(h)$ עבור $g = \phi \circ f$, $a = (1,1)$, $h = \left(3, \frac{1}{2}\right)$ כאשר:

$$f(x,y) = \left(x^2 + xy + 1, y^2 + 2\right)$$

$$\phi(u,v) = \left(u + v, 2u, v^2\right)$$

<u>פתרון:</u>
כל הרכיבים של שתי הפונקציות דיפרנציאביליים (כי הנגזרות החלקיות שלהם קיימות ורציפות), ולכן שתי הפונקציות דיפרנציאביליות וניתן להפעיל את כלל השרשרת.

$$J_\phi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix}$$

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

שימו לב שאנו מחליפים את הסימונים מדי פעם (פעם הנקודה למטה ופעם הפונקציה למטה); כמו שהסברנו, זה לא קריטי כל עוד זוכרים מי הנקודה ומי הפונקציה.
בנקודה $(1,1)$ מתקיים $f(1,1) = (3,3)$ ולכן סה"כ נקבל:

$$J_g(a) = J_\phi(f(a))\, J_f(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 2 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

ומכיוון שהפונקצייה דיפרנציאבילית:

$$dg_a(h) = J_g(a)\, h = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 2 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\frac{1}{2} \\ 19 \\ 6 \end{pmatrix}$$

7. (מבחן תשס"ה)
חשבו את מטריצית יעקובי בנקודה $(0,0)$ של הפונקציה $g=f\circ\phi$ כאשר:

$$\phi(x,y)=\left(\frac{1}{2}\left(e^{y}+\cos x\right),\frac{1}{2}\left(e^{x}+\cos y\right)\right)$$

ונתון ש$-f$ דיפרנציאבילית בנקודה $(1,1)$ ומטריצת יעקובי שלה בנקודה היא $\left(\begin{array}{cc}3 & 2\\1 & 3\end{array}\right)$.

פתרון:
שוב, קל לראות שהנגזרות החלקיות של כל הרכיבים קיימות ורציפות ולכן ϕ דיפרנציאבילית.
$\phi(0,0)=(1,1)$ ונתון ש$-f$ דיפרנציאבילית בנקודה $(1,1)$ ולכן ניתן להפעיל את כלל השרשרת בנקודה $(0,0)$.

$$J_{g}(0,0)=J_{f}(1,1)\,J_{\phi}(0,0)=\left(\begin{array}{cc}3 & 2\\1 & 3\end{array}\right)\frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc}-\sin0 & e^{0}\\e^{0} & -\sin0\end{array}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc}2 & 3\\3 & 1\end{array}\right)$$

8. (מבחן תשס"ה)
נגדיר $f:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}$ על ידי:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{\gamma}} & (x,y)\neq(0,0)\\0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

א. הפונקציה f דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$ אם ורק אם:
1. $\gamma<\frac{1}{4}$.
2. $\gamma<\frac{1}{2}$.
3. $\gamma<1$.
4. $\gamma>\frac{1}{2}$.
הערה: כדאי להשתמש בקואורדינטות פולריות.
ב. מצאו את $df_{(0,0)}h$ עבור ערכי γ בהם f דיפרנציאבילית.
פתרון:
א. לכל t ממשי, $f(0,t)=f(t,0)=0$ ולכן:

$$f_{x}(0,0)=f_{y}(0,0)=0$$

כדי ש$-f$ תהיה דיפרנציאבילית ב$-(0,0)$ צריך להתקיים:

$$f(h_{1},h_{2})=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h_{1}+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,h_{2}+o\left(\sqrt{h_{1}^{2}+h_{2}^{2}}\right)$$

כלומר:

$$\frac{h_{1}h_{2}}{\left(h_{1}^{2}+h_{2}^{2}\right)^{\gamma}}=o\left(\sqrt{h_{1}^{2}+h_{2}^{2}}\right)$$

ולכן נדרוש:

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_1h_2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{\gamma+\frac{1}{2}}}=0$$

אם נעבור לקואורדינטות פולריות נקבל:

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{h_1h_2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{\gamma+\frac{1}{2}}}=\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^{2\gamma+1}}=\lim_{r\longrightarrow 0}r^{1-2\gamma}\cos\theta\sin\theta$$

כאשר $1-2\gamma>0$ הגבול הוא אכן 0, כלומר $\gamma<\frac{1}{2}$.
מצד שני, כאשר $1-2\gamma\leq 0$ הגבול אינו 0 (ניקח מסלול שבו $\theta=\frac{\pi}{4}$, למשל).
לכן התשובה הנכונה היא 2.
ב. הנגזרות החלקיות שוות ל-0 ולכן גם:

$$df_{(0,0)}h=0$$

9. (מבחן תשע"ג)
תהי:

$$f\left(x,y,z\right)=\begin{cases}\frac{z\sin(xy)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{3}}} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

א. מצאו את $\frac{\partial f}{\partial x}$.
ב. האם f דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0,0)$?
<u>פתרון:</u>
א. בכל הנקודות שהן לא הראשית, גוזרים רגיל (נגזרת של מנה וכן הלאה):

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y,z\right)=\frac{zy\cos\left(xy\right)\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x\cdot z\sin\left(xy\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{2}{3}}}$$

בנקודה $(0,0,0)$ נחשב לפי ההגדרה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f\left(t,0,0\right)-f\left(0,0,0\right)}{t}=0$$

ב. באופן דומה לסעיף א', קל לראות ש:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f\left(0,t,0\right)-f\left(0,0,0\right)}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\left(0,0,0\right)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f\left(0,0,t\right)-f\left(0,0,0\right)}{t}=0$$

לכן, כדי ש־f תהיה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0,0)$צריך להתקיים:

$$f\left(h_1,h_2,h_3\right)=o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}\right)$$

כלומר, נדרוש:

$$\lim_{h_1^2+h_2^2+h_3^2\longrightarrow 0}\frac{h_3\sin\left(h_1h_2\right)}{\left(h_1^2+h_2^2+h_3^2\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}=0$$

אנו יודעים ש:

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{\sin\left(h_1h_2\right)}{h_1h_2}=1$$

ולכן אפשר לבדוק את הגבול:

$$\lim_{h_1^2+h_2^2+h_3^2\longrightarrow 0}\frac{h_3h_1h_2}{\left(h_1^2+h_2^2+h_3^2\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}$$

אם כן:

$$0\leq\left|\frac{h_3h_1h_2}{\left(h_1^2+h_2^2+h_3^2\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}\right|\leq\left|h_3\right|\cdot\left|\frac{h_1h_2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{\frac{5}{6}}}\right|\leq$$

מכיוון ש: $0\leq\left(h_1-h_2\right)^2=h_1^2-2h_1h_2+h_2^2$ נקבל: $2h_1h_2\leq h_1^2+h_2^2$ ולכן:

$$\leq\left|h_3\right|\cdot\left|\frac{h_1h_2}{\left(2h_1h_2\right)^{\frac{5}{6}}}\right|=\left|h_3\right|\cdot\left|\left(h_1h_2\right)^{\frac{1}{6}}\right|\longrightarrow 0$$

כאשר $\left(h_1,h_2,h_3\right)\longrightarrow(0,0,0)$ ולכן לפי כלל הסנדוויץ' הגבול אכן שווה ל־0.
לכן הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0,0)$.

10. (מבחן תשע"ה)
מצאו קיצון גלובאלי של $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2$ תחת האילוץ:

$$x^4+y^4+z^4=1$$

<u>פתרון:</u>
הלגראנז'יאן היא:

$$L\left(x,y,z,\lambda\right)=f+\lambda\left(x^4+y^4+z^4-1\right)$$

נשווה את הגרדיאנט ל־0:

$$\begin{cases} L_x = 2x + 4\lambda x^3 = 0 \\ L_y = 2y + 4\lambda y^3 = 0 \\ L_z = 2z + 4\lambda z^3 = 0 \\ L_\lambda = x^4 + y^4 + z^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

נשים לב שגם הפונקציה וגם האילוץ סימטריים ביחס לכל הצירים, ושהאילוץ מגדיר קבוצה קומפקטית.
למשוואה הראשונה יש שני פתרונות:

$$x = 0, x^2 = -\frac{1}{2\lambda}$$

באופן דומה למשוואה השנייה:

$$y = 0, y^2 = -\frac{1}{2\lambda}$$

ולמשוואה השלישית:

$$z = 0, z^2 = -\frac{1}{2\lambda}$$

אם $x = y = z = 0$ האילוץ לא מתקיים וסתירה.
אם אחד מהמשתנים מתאפס, בה"כ $x = 0$, ושני האחרים לא:

$$y^2 = z^2 = -\frac{1}{2\lambda}$$

נציב במשוואת האילוץ ונקבל:

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

עבור $\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}}$ נקבל ש: $y^2, z^2 < 0$ וסתירה. עבור $\lambda = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ נקבל:

$$y^2 = z^2 = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ולכן: $y = z = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$, ונקבל ארבע נקודות:

$$\left(0, \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)$$

באופן דומה, אם y מתאפס ושני האחרים לא מתאפסים נקבל:

$$\left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, 0, \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)$$

ואם z מתאפס והשני האחרים לא מתאפסים נקבל:

$$\left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, 0\right)$$

סה"כ 12 נקודות.
אם שני משתנים מתאפסים, בה"כ $x = y = 0$, והשלישי לא:

$$z^2 = -\frac{1}{2\lambda}$$

מהאילוץ נקבל:

$$\frac{1}{4\lambda^2} = 1$$

ולכן $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. עבור $\lambda = \frac{1}{2}$ נקבל ש: $z^2 < 0$ וסתירה.
עבור $\lambda = -\frac{1}{2}$ נקבל:

$$z^2 = 1$$

ולכן $z = \pm 1$. נקבל את הנקודות:

$$(0, 0, \pm 1)$$

באופן דומה אם x לא מתאפס ושני האחרים כן נקבל:

$$(\pm 1, 0, 0)$$

ואם y לא מתאפס ושני האחרים כן נקבל:

$$(0, \pm 1, 0)$$

סה"כ 6 נקודות.
אם שלושת המשתנים לא מתאפסים:

$$x^2 = y^2 = z^2 = -\frac{1}{2\lambda}$$

נקבל ממשוואת האילוץ:

$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}=1$$

ולכן $\lambda=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$. עבור $\lambda=\sqrt{\frac{3}{4}}$ נקבל ש: $x^2,y^2,z^2<0$ וסתירה.
עבור $\lambda=-\sqrt{\frac{3}{4}}$ נקבל:

$$x^2=y^2=z^2=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

ולכן $x=y=z=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$. נקבל את הנקודות:

$$\left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}},\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}},\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$$

סה"כ 8 נקודות.
כדי למצוא את הנקודות הגלובאליות, נציב בפונקציה:

$$f\left(0,\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}},\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

וכך גם $f\left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}},0,\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right),f\left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}},\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}},0\right)$.

$$f\left(0,0,\pm1\right)=1$$

וכך גם $f\left(0,\pm1,0\right),f\left(\pm1,0,0\right)$.

$$f\left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}},\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}},\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)=\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$$

לכן נקודות המקסימום הגלובאליות הן מהצורה:

$$\left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}},\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}},\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)$$

ונקודות המינימום הגלובאליות הן מהצורה:

$$\left(\pm1,0,0\right),\left(0,\pm1,0\right),\left(0,0,\pm1\right)$$

11. (מבחן תשע"ג)
הראו שהמערכת:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

בסביבת הנקודה $A=(1,-1,2)$ מגדירה את הפונקציות $x=x(z)$, $y=y(z)$ בצורה סתומה.
מצאו את $\frac{d^2x}{dz^2}(2)\,,\frac{dy}{dz}(2)\,,\frac{dx}{dz}(2)$.
<u>פתרון:</u>
הפונקציות:

$$f_1(x,y,z)=x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2, f_2(x,y,z)=x+y+z-2$$

גזירות ברציפות אינסוף פעמים.
כמו כן, הנקודה A מקיימת את שתי המשוואות.
מטריצת היעקובי היא:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

בנקודה A נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

שהיא מטריצה הפיכה.
לכן היעקוביאן בנקודה שונה מ-0.
כל תנאי משפט הפונקציה הסתומה מתקיימים.
לכן, לפי משפט הפונקציה הסתומה המערכת אכן מגדירה פונקציות כנדרש.
כעת, לפי משפט הפונקציה הסתומה, קיימת סביבה של A עבורה:

$$\frac{dx}{dz}=-\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} -z & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{z+2y}{2x-2y}$$

$$\frac{dy}{dz}=-\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} 2x & -z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=-\frac{2x+z}{2x-2y}$$

ולכן אם נציב את הנקודה A נקבל:

$$\frac{dx}{dz}(2)=0,\frac{dy}{dz}(2)=-1$$

כדי לחשב את הנגזרת השנייה נגזור את $\frac{dx}{dz}$ לפי z פעם נוספת תוך כדי שאנו מתייחסים אל x,y כאל פונקציות של z:

$$\frac{d^2x}{dz^2}=\frac{\left(1+2\frac{dy}{dz}\right)(2x-2y)-\left(2\frac{dx}{dz}-2\frac{dy}{dz}\right)(z+2y)}{(2x-2y)^2}$$

נציב $z=2$ (ואז $x=1,\frac{dx}{dz}=0,y=-1,\frac{dy}{dz}=-1$):

$$\frac{d^2x}{dz^2}(2)=\frac{(1-2)(2+2)-(-2)(2-2)}{(2+2)^2}=-\frac{1}{4}$$

12. (מבחן תשע"ה)
מצאו את הנקודות הקריטיות של הפונקציה וסווגו אותן:

$$f(x,y)=(x+y)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

<u>פתרון:</u>
נשווה את הגרדיאנט ל–0:

$$\begin{cases} f_x=e^{-\left(x^2+y^2\right)}-2x(x+y)e^{-\left(x^2+y^2\right)}=0 \\ f_y=e^{-\left(x^2+y^2\right)}-2y(x+y)e^{-\left(x^2+y^2\right)}=0 \end{cases}$$

אחרי שנצמצם ב–$e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ נקבל:

$$\begin{cases} 1-2x^2-2xy=0 \\ 1-2y^2-2xy=0 \end{cases}$$

נחסר את המשוואות זו מזו ונקבל:

$$2x^2-2y^2=0$$

כלומר: $2(x-y)(x+y)=0$.
אם $x-y=0$ אז $x=y$; נציב באחת המשוואות ונקבל:

$$1-2x^2-2x^2=0$$

ואז $x=\pm\frac{1}{2}$ והנקודות הן $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

אם $x+y=0$ אז $x=-y$; נציב באחת המשוואות ונקבל:

$$1-2x^2+2x^2=0$$

כלומר $1=0$ וסתירה.
מטריצת הסה נראית כך:

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} -4x-2y-2x+4x^3+4x^2y & -2x-2y+4x^2y+4y^2x \\ -2x-2y+4x^2y+4y^2x & -4y-2x-2y+4y^3+4y^2x \end{pmatrix} e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

בנקודות שלנו:

$$H_f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

המינורים הם: $|M_1|=-3<0$, $|M_2|=8>0$ ולכן זו נקודת מקסימום.

$$H_f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

המינורים הם: $|M_1|=5>0, |M_2|=16>0$ ולכן זו נקודת מקסימום.

13. (מבחן תשע"ג)
מצא אקסטרמום **מקומי** של הפונקציה $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ תחת האילוץ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

כאשר $a>b>c>0$.
<u>פתרון:</u>
הלגראנז'יאן היא:

$$L=f+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

נשווה את הגריאנט ל-0:

$$\begin{cases} L_x=2x+\frac{2\lambda x}{a^2}=0 \\ L_y=2y+\frac{2\lambda y}{b^2}=0 \\ L_z=2z+\frac{2\lambda z}{c^2}=0 \\ L_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$$

בכל אחת מהמשוואות הראשונות נקבל שתי אופציות.
מהראשונה, $x=0$ או $\lambda=-a^2$.
מהשנייה, $y=0$ או $\lambda=-b^2$.

מהשלישית, $z=0$ או $\lambda=-c^2$.
במקרה $x=y=z=0$ משוואת האילוץ לא תתקיים וסתירה.
אם $\lambda=-a^2$, מכיוון שהמספרים a,b,c שונים נקבל: $y=z=0$.
מהאילוץ במקרה זה נקבל $\frac{x^2}{a^2}=1$ כלומר $x=\pm a$.
באופן דומה, אם $\lambda=-b^2$ נקבל: $x=z=0, y=\pm b$.
אם $\lambda=-c^2$ נקבל: $x=y=0, z=\pm c$.
אם כך, קיבלנו את הנקודות הבאות:

$$(\pm a,0,0),(0,\pm b,0),(0,0,\pm c)$$

מכיוון ש־f רציפה והקבוצה קומפקטית נקבל שנקודות הקיצון הגלובאליות הן מי מהנקודות האלו.
אם נקודה היא קיצון גלובאלי היא בוודאי קיצון מקומי. ערך הפונקציה בנקודות הוא:

$$f(\pm a,0,0)=a^2, f(0,\pm b,0)=b^2, f(0,0,\pm c)=c^2$$

נתון ש: $a>b>c>0$ ולכן $a^2>b^2>c^2>0$.
לכן, הנקודות $(\pm a,0,0),(0,0,\pm c)$ הן נקודות קיצון גלובאליות (מינימום, מקסימום בהתאמה) ובפרט הן קיצון מקומיות.
נותר לנו לטפל בנקודות $(0,\pm b,0)$ הארורות.
נתקדם אל הנקודות פעם מכיוון ה־z ופעם מכיוון ה־x ונראה שפעם עולים אליהן ופעם יורדים, והן לא קיצון.
כלומר, נסתכל על ההטלה למישור xy. במצב כזה, $z=0$ ואנו בעצם מחפשים קיצון לפונקציה:

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

תחת האילוץ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. במצב כזה הנקודות $(0,\pm b)$ הן נקודות מינימום (כמו שראינו, כי $b^2<a^2$).
מאידך גיסא אם נסתכל על ההטלה למישור yz שם $x=0$ אנו בעצם מחפשים קיצון לפונקציה:

$$f(y,z)=y^2+z^2$$

תחת האילוץ: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. במצב כזה הנקודות $(\pm b,0)$ הן נקודות מקסימום (כי $b^2>c^2$).
לכן הנקודה $(0,\pm b,0)$ אינה נקודת קיצון.

14. (מבחן תשע"ד)
נגדיר:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

א. האם f רציפה ב־$\mathbb{R}^2$?
ב. האם הנגזרות החלקיות קיימות בכל נקודה ב־$\mathbb{R}^2$?
ג. האם f דיפרנציאבילית ב־$\mathbb{R}^2$?
<u>פתרון:</u>
א. בכל נקודה $(x,y)\neq(0,0)$, f רציפה כמנת רציפות.
נבדוק רציפות בנקודה $(0,0)$:

$$0\leq\left|\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^3}{x^2}\right|+\left|\frac{xy^2}{y^2}\right|=|2x|\longrightarrow 0$$

כאשר $(x,y)\longrightarrow(0,0)$. לכן לפי כלל הסנדוויץ':

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$$

והפונקציה רציפה ב־ $(0,0)$.
סה"כ הפונקציה רציפה ב־$\mathbb{R}^2$.
ב. בכל נקודה $(x,y)\neq(0,0)$, הנגזרות החלקיות קיימות:

$$f_x(x,y)=\frac{\left(3x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)-(2x)\left(x^3-xy^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{(-2xy)\left(x^2+y^2\right)-(2y)\left(x^3-xy^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

בנקודה $(0,0)$נחשב לפי ההגדרה:

$$f_x(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\frac{t^3}{t^2}}{t}=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{0}{t}=0$$

ולכן הנגזרות החלקיות קיימות בכל נקודה ב־$\mathbb{R}^2$.
ג. בכל נקודה $(x,y)\neq(0,0)$ הפונקציה דיפרנציאבילית (כי הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות).
בנקודה $(0,0)$ נדרוש:

$$f(h_1,h_2)=f(0,0)+f_x(0,0)\,h_1+f_y(0,0)\,h_2+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

כלומר:

$$\frac{h_1^3-h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2}=h_1+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

והשאלה היא האם:

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{\frac{h_1^3-h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2}-h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{h_1^2+h_2^2\longrightarrow 0}\frac{-2h_1h_2^2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0$$

במסלול $h_1=h_2$ נקבל:

$$\lim_{h_1\longrightarrow 0}\frac{-2h_1^3}{\left(h_1^2+h_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$$

ולכן הגבול אינו 0 ולכן f אינה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

15. (מבחן תשס"א)
בעזרת שיטת לגראנז', מצאו את המרחק מהנקודה $a=(1,2,1)$ למישור:

$$x+2y+z=1$$

מהי הנקודה הכי קרובה ל־a על מישור זה?
<u>פתרון:</u>
נסתכל על פונקציית המרחק בריבוע, כמו שראינו בעבר:

$$f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2$$

כאשר האילוץ הוא:

$$g(x,y,z)=x+2y+z-1=0$$

הלגראנז'יאן היא:

$$L=f+\lambda g$$

נשווה את הגרידאנט ל־0:

$$\begin{cases} L_x=2(x-1)+\lambda=0\\ L_y=2(y-2)+2\lambda=0\\ L_z=2(z-1)+\lambda=0\\ L_\lambda=x+2y+z-1=0\end{cases}$$

מהמשוואות הראשונות נקבל:

$$x=1-\frac{\lambda}{2},y=2-\lambda,z=1-\frac{\lambda}{2}$$

נציב באילוץ:

$$1-\frac{\lambda}{2}+4-2\lambda+1-\frac{\lambda}{2}-1=0\Longrightarrow\lambda=\frac{4}{3}$$

ולכן הנקודה היא: $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$. המרחק הוא:

$$\sqrt{f\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}=\sqrt{\frac{24}{9}}$$

16. (מבחן תשע"ג)
תהי $f(x,y)$ פונקציה המקיימת $f_{xx}+f_{yy}=0$. נגדיר:

$$g(x,y)=f\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

הראו ש$-g$ מקיימת את המשוואה: $g_{xx}+g_{yy}=0$.
<u>פתרון:</u>
לשם הנוחות, נסמן:

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},v=\frac{y}{x^2+y^2}$$

לפי כלל השרשרת:

$$g_x=f_uu_x+f_vv_x,g_y=f_uu_y+f_vv_y$$

ושוב:

$$g_{xx}=(f_uu_x)_x+(f_vv_x)_x=(f_u)_x\,u_x+f_uu_{xx}+(f_v)_x\,v_x+f_vv_{xx}=$$

$$=(f_{uu}u_x+f_{uv}v_x)\,u_x+f_uu_{xx}+(f_{vu}u_x+f_{vv}v_x)\,v_x+f_vv_{xx}=$$

$$=f_{uu}u_x^2+f_{uv}u_xv_x+f_uu_{xx}+f_{vu}u_xv_x+f_{vv}v_x^2+f_vv_{xx}$$

באופן דומה:

$$g_{yy}=f_{uu}u_y^2+f_{uv}u_yv_y+f_uu_{yy}+f_{vu}u_yv_y+f_{vv}v_y^2+f_vv_{yy}$$

אנו צריכים לחשב את $g_{xx}+g_{yy}$. נקבץ את הביטוי:

$$g_{xx}+g_{yy}=A+B+C$$

כאשר:

$$\begin{cases} A = f_{uu}u_x^2 + f_{vv}v_x^2 + f_{uu}u_y^2 + f_{vv}v_y^2 \\ B = 2f_{uv}v_xu_x + 2f_{vu}u_yv_y \\ C = f_uu_{xx} + f_uu_{yy} + f_vv_{xx} + f_vv_{yy} \end{cases}$$

מתקיים:

$$A = (f_{uu} + f_{vv})\left(u_x^2 + u_y^2\right) = 0$$

מכיוון ש: $f_{uu} + f_{vv} = 0$ לפי הנתון, ובנוסף:

$$u_y = v_x = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}, u_x = -v_y = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

ולכן $u_x^2 = v_y^2, u_y^2 = v_x^2$.
כמו כן, מתקיים: $u_xv_x = -u_yv_y$ ולכן:

$$B = 2f_{uv}\left(u_xv_x + u_yv_y\right) = 0$$

נחשב את הנגזרות השניות של u, v:

$$u_{xx} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}, u_{yy} = -\frac{2x^3 - 6xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}$$

ולכן $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
באופן סימטרי, $v_{xx} + v_{yy} = 0$. לכן:

$$C = f_u\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f_v\left(v_{xx} + v_{yy}\right) = 0$$

סה"כ קיבלנו:

$$g_{xx} + g_{yy} = 0 + 0 + 0 = 0$$

והוכחנו את הדרוש.

17. (מבחן תשנ"ח)
תהי $f(x,y) = \left(x^3 - y^2, \sin x - \ln y\right)$ בתחום $y > 0$.
א. הוכיחו ש-f הפיכה בסביבת הנקודה $(0,1)$.
ב. מצאו את $J_{f^{-1}}(-1,0)$.
<u>פתרון:</u>

א. הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x = \left(3x^2, \cos x\right), f_y = \left(-2y, -\frac{1}{y}\right)$$

בסביבת הנקודה $(0,1)$ הנגזרות החלקיות רציפות ולכן הפונקציה f דיפרנציאבילית שם.
מטריצת יעקובי היא:

$$J_f = \begin{pmatrix} 3x^2 & -2y \\ \cos x & -\frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

ובנקודה $(0,1)$ נקבל:

$$J_f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |J_f(0,1)| = 2 \neq 0$$

ולכן לפי משפט הפונקציה ההפוכה, f הפיכה בסביבת הנקודה $(0,1)$.
ב. נשים לב שאכן:

$$f(0,1) = (-1,0)$$

ולכן לפי משפט הפונקציה ההפוכה:

$$J_{f^{-1}}(-1,0) = (J_f(0,1))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

18. (מבחן תשע"ג)
חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} |\cos(x+y)|\, dxdy$$

<u>פתרון:</u>
מתקיים:

$$|\cos\theta| = \begin{cases} \cos\theta & 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi \\ -\cos\theta & \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

אנו מסתכלים על $0 \le \theta \le 2\pi$ כי $0 \le x+y \le 2\pi$ בתחום שלנו.
אם כן, נפצל את האינטגרל שלנו לשלושה אינטגרלים:

$$I_1 = \iint\limits_{0 \le x+y \le \frac{\pi}{2}} \cos(x+y)\, dxdy$$

$$I_2 = \iint\limits_{\frac{\pi}{2} \le x+y \le \frac{3\pi}{2}} -\cos(x+y)\,dxdy$$

$$I_3 = \iint\limits_{\frac{3\pi}{2} \le x+y \le 2\pi} \cos(x+y)\,dxdy$$

נחשב את האינטגרל הראשון:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y)\,dydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}-x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\,dx =$$

$$= (x+\cos x)|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

האינטגרל השלישי דומה:

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi} \cos(x+y)\,dydx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x+y)|_{y=\frac{3\pi}{2}-x}^{y=\pi}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin(x+\pi)+1)\,dx =$$

$$= \left(-\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+x\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} = -1+\pi-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

את האינטגרל השני עלינו לפצל:

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi} -\cos(x+y)\,dydx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}-x} -\cos(x+y)\,dydx$$

נחשב כל אחד מהאינטגרלים האלו:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi} -\cos(x+y)\,dydx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)|_{y=\frac{\pi}{2}-x}^{y=\pi}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x+\pi)-1)\,dx =$$

$$= -\left(-\cos(x+\pi)-x\right)|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{2}-x} -\cos(x+y)\,dydx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x+y)|_{y=0}^{y=\frac{3\pi}{2}-x}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-1-\sin x)\,dx =$$

$$= -(\cos x - x)|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} = 1 + \frac{\pi}{2}$$

בסה"כ:

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |\cos(x+y)|\,dxdy = I_1 + I_2 + I_3 = 2\pi$$

19. (מבחן תשס"ח)
כתבו נוסחת טיילור לפונקציה $f(x,y) = \frac{1}{2-xy^2}$ מסביב לנקודה $(0,0)$ עד סדר 30.
הראו שהשארית היא אכן $o\left(\|(x,y)\|^{30}\right)$.
<u>פתרון:</u>
אפשר לכתוב:

$$f(x,y) = \frac{1}{2-xy^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{xy^2}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{xy^2}{2}\right)^n$$

לפי נוסחת סכום סדרה הנדסית, מכיוון שבסביבת הנקודה $(0,0)$ מתקיים $\left|\frac{xy^2}{2}\right| < 1$.
המעלה בפנים היא 3 וכדי להגיע לסדר 30 נפתח את הטור עד לסדר 10:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{10}\left(\frac{xy^2}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=11}^{\infty}\left(\frac{xy^2}{2}\right)^n$$

נראה שהשארית אכן מקיימת את הדרוש, כלומר:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{\frac{1}{2}\sum_{n=11}^{\infty}\left(\frac{xy^2}{2}\right)^n}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{30}} = 0$$

אם נעבור לקואורדינטות קוטביות, נקבל:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{\frac{1}{2}\sum_{n=11}^{\infty}\left(\frac{xy^2}{2}\right)^n}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{30}} = \lim_{r\longrightarrow 0}\frac{\sum_{n=11}^{\infty} r^{3n}\cos^n\theta\sin^{2n}\theta}{2^{n+1}r^{30}}$$

כעת:

$$0 \le \left|\frac{\sum_{n=11}^{\infty} r^{3n}\cos^n\theta\sin^{2n}\theta}{2^{n+1}r^{30}}\right| \le \sum_{n=11}^{\infty}\left|\frac{r^{3n-30}}{2^{n+1}}\right| \le |r|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{r}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$$

כאשר $r \longrightarrow 0$. לכן לפי כלל הסנדוויץ' נקבל שהגבול שווה ל־0 כנדרש.

20. (מבחן תשע"ג)

חשבו את נפח הגוף החסום על ידי:

$$z = x^2 + y^2, x = x^2 + y^2, 2x = x^2 + y^2, z = 0$$

<u>פתרון:</u>
אנו רוצים לחשב את האינטגרל:

$$V = \iint\limits_{x \le x^2+y^2 \le 2x} \int\limits_0^{x^2+y^2} dzdydx$$

נעבור לקואורדינטות גליליות:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$$

נסתכל על התנאים:

$$x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x$$

היזכרו במה שראיתם בתיכון (או ביסודי) והסיקו שאלו המעגלים:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

שני המעגלים נמצאים בצדו הימני של מישור xy ולכן $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.
מצד שני, נשים לב ששני התנאים פירושם:

$$r^2 = r\cos\theta, r^2 = 2r\cos\theta$$

ולכן $\cos\theta \le r \le 2\cos\theta$. כלומר:

$$V = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\cos\theta}^{2\cos\theta} \int\limits_0^{r^2} rdzdrd\theta$$

ה־r שצץ לו שם הוא היעקוביאן. שימו לב שבתחום שלנו, אכן $\cos\theta \le 2\cos\theta$. ובכן:

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\cos\theta}^{2\cos\theta} r^3 drd\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4}\bigg|_{r=\cos\theta}^{r=2\cos\theta} d\theta = \frac{15}{4} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta$$

היידה זהויות:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\pi + \left(\sin 2\theta\right)\Big|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4\theta}{2} d\theta\right) = \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\sin 4\theta}{8}\right)\Bigg|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{3\pi}{8}$$

ובסה"כ:

$$V = \frac{15}{4}\cdot\frac{3\pi}{8} = \frac{45\pi}{32}$$

21. (מבחן תשע"ה)
נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 2\left(x^2+y^2\right) - z^2 = 0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$$

א. הוכיחו שהמערכת מגדירה פונקציה יחידה $\phi : z \mapsto \left(x\left(z\right), y\left(z\right)\right)$ מסביבה U של $z=2$ לסביבה V של $\left(-1,1\right)$, ו־ϕ היא C^1 ב־U.
ב. חשבו את $\phi'\left(2\right)$.

<u>פתרון:</u>
הפונקציות:

$$f_1\left(x,y,z\right) = 2\left(x^2+y^2\right) - z^2, f_2\left(x,y,z\right) = x+y+z-2$$

גזירות ורציפות והכל בסדר.
הנקודה $\left(-1,1,2\right)$ מקיימת את המערכת.
מטריצת יעקובי היא:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & 4y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

וכאשר $\left(x,y\right) = \left(-1,1\right)$ נקבל:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה הפיכה, לכן היעקוביאן שונה מ־0.
כל תנאי משפט הפונקציה הסתומה מתקיימים, ולכן המערכת אכן מגדירה פונקציה ϕ כנדרש.

ב. לפי משפט הפונקציה הסתומה:

$$\frac{dx}{dz}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}-2z & 4y\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4x & 4y\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{2z+4y}{4x-4y}$$

$$\frac{dy}{dz}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial z}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}4x & -2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4x & 4y\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=-\frac{4x+2z}{4x-4y}$$

בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$, ובנקודה נקבל:

$$\frac{dx}{dz}(2)=\frac{4+4}{-4-4}=-1,\ \frac{dy}{dz}(2)=0$$

ולכן:

$$\phi'(2)=(-1,0)$$

22. (מבחן תשע"ג)
מצאו את הנקודות הקריטיות של הפונקציה:

$$f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)$$

וסווגו אותן.
<u>פתרון:</u>
נשווה את הגרדיאנט ל-0:

$$\begin{cases} f_x=3x^2y^2(1-x-y)-x^3y^2=0\\ f_y=2x^3y(1-x-y)-x^3y^2=0\end{cases}$$

כלומר:

$$\begin{cases} x^2y^2(3-4x-y)=0\\ x^3y(2-2x-3y)=0\end{cases}$$

נקבל שכל נקודה שבה $x=0$ או $y=0$ היא פתרון.
כאשר $x,y\neq 0$ נקבל:

$$\begin{cases} 3-4x-y=0\\ 2-2x-3y=0\end{cases}$$

והפתרון הוא $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$.
מטריצת הסה היא:

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 6xy^2-12x^2y^2-6xy^3 & 6x^2y-8x^3y-9x^2y^2 \\ 6x^2y-8x^3y-9x^2y^2 & 2x^3-2x^4-6x^3y \end{pmatrix}$$

בנקודה $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ נקבל:

$$H_f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

המינורים הם: $|M_1|=-\frac{1}{9}<0$, $|M_2|=\frac{1}{144}>0$ ולכן זו נקודת מקסימום.
לנקודות מהצורה $x=0$ או $y=0$ נצטרך להפעיל שיקולים אחרים.
נתבונן בנקודה $(0,a)$ כלשהי.
אם נתקדם לאורך הישר $y=-x+a$ (שעובר בנקודה) נקבל:

$$f(x,-x+a)=x^3(-x+a)^2(1-a)$$

אם $a\neq 1$ הפונקציה f מחליפה סימן כאשר עוברים ב$-$ $x=0$ ולכן הנקודה $(0,a)$ אינה קיצון.
עבור $a=1$, אם נתקדם אליה לאורך הישר $y=1$ נקבל:

$$f(x,1)=-x^4$$

ולכן $x=0$ היא מקסימום לאורך הישר הזה.
מצד שני, אם נתקדם לאורך הישר $y=-2x+1$ נקבל: $f(x,-2x+1)=x^4(-2x+1)^2$ ואז $x=0$ היא מינימום לאורך הקו הזה.
לכן הנקודה $(0,1)$היא נקודת אוכף, ולכן כל הנקודות על ציר ה$-y$ הן אוכף.
נתבונן בנקודה $(a,0)$ כלשהי.
אם $a>1$ קיימת סביבה של הנקודה שבה $1-x-y<0$, ולכן באותה סביבה מתקיים:

$$f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)\leq 0$$

מכיוון שבסביבה זו $x^3>0$. בנקודה עצמה: $f(a,0)=0$ ולכן $(a,0)$ נקודת מקסימום.
אם $a<0$, קיימת סביבה של הנקודה שבה $1-x-y>0$ ולכן באותה סביבה מתקיים:

$$f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)\leq 0$$

מכיוון שבסביבה זו $x^3<0$. בנקודה עצמה: $f(a,0)=0$ ולכן $(a,0)$ נקודת מקסימום.
אם $0<a<1$, קיימת סביבה של הנקודה שבה $1-x-y>0$, ולכן באותה סביבה מתקיים:

$$f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)\geq 0$$

מכיוון שבסביבה זו $x^3 > 0$. בנקודה עצמה: $f(a,0) = 0$ ולכן $(a,0)$ נקודת מינימום.
כאשר $a = 0$ הנקודה נמצאת גם על ציר ה$-y$ ואנו יודעים שזו נקודת אוכף.
כאשר $a = 1$ אם נתקדם אל הנקודה לאורך הישר $x = 1$ נקבל:

$$f(1,y) = -y^3$$

שזו פונקציה עם נקודת פיתול ב$-y = 0$ ולכן הנקודה היא נקודת אוכף.
לסיכום:
הנקודות $\{(a,0) : a > 1\} \cup \{(a,0) : a < 0\} \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ הן נקודות מקסימום.
הנקודות $\{(a,0) : 0 < a < 1\}$ הן נקודות מינימום.
הנקודות $\{(0,a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(1,0)\}$ הן נקודות אוכף.

23. (מבחן תשע"ה)
תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$. נגדיר:

$$h(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & xy > 0 \\ 0 & xy \leq 0 \end{cases}$$

הוכיחו שאם $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ אז h דיפרנציאבילית ב$-(0,0)$.
פתרון:
f דיפרנציאבילית ב$-(0,0)$ ולכן אפשר לכתוב:

$$f(t_1,t_2) = f(0,0) + f_x(0,0)\,t_1 + f_y(0,0)\,t_2 + o(\|t\|)$$

כלומר:

$$f(t_1,t_2) = o(\|t\|)$$

ולכן מתקיים:

$$\lim_{(t_1,t_2)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(t_1,t_2)}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} = 0$$

כעת, לפי הגדרת h מתקיים:

$$h(0,0) = 0$$

וגם:

$$h_x(0,0) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{h(t,0) - h(0,0)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$h_y(0,0) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{h(0,t) - h(0,0)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

נבדוק דיפרנציאביליות לפי ההגדרה:

$$h\left(t_1,t_2\right)=h\left(0,0\right)+h_x\left(0,0\right)t_1+h_y\left(0,0\right)t_2+o\left(\|t\|\right)$$

כלומר: $h\left(t_1,t_2\right)=o\left(\|t\|\right)$, ולכן נבדוק האם:

$$\lim_{(t_1,t_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{h\left(t_1,t_2\right)}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}=0$$

נשים לב לכך ש: $h\left(t_1,t_2\right)\leq f\left(t_1,t_2\right)$ (כי $h=f$ או $h=0$) ולכן:

$$0\leq\lim_{(t_1,t_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{h\left(t_1,t_2\right)}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}\leq\lim_{(t_1,t_2)\longrightarrow(0,0)}\frac{f\left(t_1,t_2\right)}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}=0$$

ואכן h דיפרנציאבילית.

24. (מבחן תשע"ה)
תהי $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+\|x\|^2}-1}{\|x\|^2} & x\neq0\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}$$

א. מצאו את $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(0\right)$.
ב. האם f דיפרנציאבילית ב$-x=0$?
פתרון:
נחשב לפי ההגדרה:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(0\right)=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f\left(te_i\right)-f\left(0\right)}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t^2}-\frac{1}{2}}{t}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{\sqrt{1+t^2}-1-\frac{t^2}{2}}{t^3}$$

מכיוון ש: $\|te_i\|^2=t^2$. נכפול ונחלק בצמוד:

$$=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{1+t^2-\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^2}{t^3\left(\sqrt{1+t^2}+1+\frac{t^2}{2}\right)}=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{t^4}{4t^3\left(\sqrt{1+t^2}+1+\frac{t^2}{2}\right)}=0$$

ואלו הנגזרות המבוקשות.
ב. כדי שהפונקציה תהיה דיפרנציאבילית ב$-x=0$ (כשאנו יודעים שהנגזרות החלקיות כולם מתאפסות בנקודה), נדרוש:

$$f\left(h\right)=f\left(0\right)+o\left(\|h\|\right)$$

כלומר:

$$\lim_{\|h\|\longrightarrow 0}\frac{\frac{\sqrt{1+\|h\|^2}-1}{\|h\|^2}-\frac{1}{2}}{\|h\|}=0$$

והגבול הזה אכן שווה ל-0 כפי שראינו בסעיף א' (הציבו $t=\|h\|$).
לכן הפונקציה f דיפרנציאבילית ב-0 $x=$.

25. (מבחן תשע"ד)
מבין כל התיבות שסכום אורך צלעותיהן קבוע, מצאו את התיבה בעלת הנפח המקסימלי.
פתרון:
נמצא את המקסימום של הפונקציה $V(x,y,z)=xyz$ תחת האילוץ:

$$2x+2y+2z=A$$

הלגראנז'יאן היא:

$$L(x,y,z)=V+\lambda(2x+2y+2z-A)$$

נשווה את הגרדיאנט ל-0:

$$\begin{cases} L_x=yz+2\lambda=0\\ L_y=xz+2\lambda=0\\ L_z=xy+2\lambda=0\\ L_\lambda=2x+2y+2z-A=0\end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה, $y=-\frac{2\lambda}{z}$.
מהמשוואה השלישית, $y=-\frac{2\lambda}{x}$. לכן $x=z$.
נציב זאת במשוואה השנייה ונקבל: $x=\pm\sqrt{-2\lambda}$.
לכן גם $y=z=\pm\sqrt{-2\lambda}$ בהתאמה, כלומר:

$$\left(\sqrt{-2\lambda},\sqrt{-2\lambda},\sqrt{-2\lambda}\right),\left(-\sqrt{-2\lambda},-\sqrt{-2\lambda},-\sqrt{-2\lambda}\right)$$

נציב באילוץ:

$$6\sqrt{-2\lambda}-A=0$$

לכן: $x=y=z=\sqrt{-2\lambda}=\frac{A}{6}$ והנפח במקרה זה הוא:

$$V=\frac{A^3}{216}$$

עבור הנקודה השלילית נקבל נפח שלילי (הרי מתקיים $x,y,z,A>0$) וזה כמובן לא יכול להיות.
אם כן, התיבה שנפחה מקסימלי היא קוביה שאורך צלעותיה הוא $\frac{A}{6}$.