

אלגברה ליניארית 2 – תרגיל מס' 5

1. הוכח שלכל וקטור u מתקיים: $\langle v, 0 \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$.

2. האם ההגדרה הבאה מהווה מכפלה פנימית ב- V ? $(v_1, v_2) = x_1 x_2 + 7 y_1 y_2$; $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

$$v_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

3 בדוק לאילו ערכים של α הפונקציה הבאה היא מכפלה פנימית מעל \mathbb{R}^2 :

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle := x_1 y_1 - 3 x_1 y_2 - 3 x_2 y_1 + \alpha x_2 y_2$$

(היעזר במשפט הבא: אם $\langle v, u \rangle = v A u^t$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ היא מכפלה פנימית אז $A = A^t$, $\alpha_{11} > 0$, $\alpha_{22} > 0$ ו- $|A| > 0$).

4. הוכח שאם הוקטורים v_1, \dots, v_4 מקיימים: $\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 3 & i = j \\ -1 & i \neq j \end{cases}$ אזי: $v_1 + \dots + v_4 = 0$.

5. (א) יהי V מרחב אוקלידי (כלומר מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{R}). הוכיחו כי לכל $u, v \in V$

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) : \text{מתקיים}$$

(ב) תן דוגמה לכך שמעל מרחב אוניטרי (ז"א מעל \mathbb{C}) השוויון לא נכון.