

15/10/15

מבחן בחשבון אינפיניטיסימלי 2

מועד ג'

ענו על כל השאלות הבאות. כל שאלה שווה 18 נקודות. חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט. אתם חייבים לנמק כל תשובה. משך הבחינה שלוש שעות. בהצלחה!

1. חשבו: א. $\int x \ln(x^2 + x + 1) dx$. ב. $\int e^{\sqrt{3x}} dx$

2.

א. קבעו האם האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{\ln(x)} dx$ מתכנס או מתבדר.

ב. חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$

3. יהיו שני טורי חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ עם רדיוסי התכנסות $r_a, r_b \in \mathbb{R}$ בהתאמה.

א. הוכיחו או הפריכו: רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ הוא $\min\{r_a, r_b\}$.

ב. נניח בנוסף כי $r_a \neq r_b$.

הוכיחו או הפריכו: רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2b_n) x^n$ הוא $\min\{r_a, r_b\}$.

4. תהי סדרת פונקציות $f_n(x)$ המתכנסת במ"ש בקטע A לפונקציה הגבול $f(x)$.

עוד נניח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in A$ מתקיים כי $f_n(x) \geq 1$.

א. הוכיחו כי לכל $x \in A$ מתקיים כי $f(x) \geq 1$.

ב. הוכיחו כי $\frac{1}{f_n(x)}$ מתכנסת במ"ש בקטע A לפונקציה הגבול $\frac{1}{f(x)}$.

5.

א. מצאו את טור פורייה של ההמשך המחזורי של הפונקציה $f(x) = |x|$

בקטע $(-\pi, \pi]$.

ב. קבעו באיזו תחום הטור מתכנס ל $f(x)$.

6. חשבו את $\sin^2(1)$ בדיוק של 10^{-2} בעזרת פיתוח טיילור סופי. הצדיקו את תשובתכם

ע"י הערכת השארית בפיתוח.