

אלגברה ליניארית 89-119 סמסטר א', מועד ב, תשע"ו.

מרצה: ד"ר יונתן בק.

תאריך:

משך המבחן: שעתיים וחצי.

חומר עזר: מחשבון פשוט.

הוראות:

יש לענות בפירוט על שאלה 1 ובנוסף 3 מתוך 4 השאלות הבאות (2 עד 5). במקרה שלא מסומן איזה שאלות לבדוק הראשונים בין 2 עד 5 ייבדקו. מכיוון שהמחברות ייסרקו כל פתרון חייב להיכתב במחברת בלבד. כל שאלה שווה 25 נקודות. יש לרשום תשובות מנומקות. בהצלחה!!

1. [חובה] הסתכל במערכת הבאה:

$$\begin{aligned}x + y + kz &= k \\ .kx + ky + z &= 1 \\ x + ky + kz &= 2\end{aligned}$$

- a. עבור אילו ערכי  $k$  למערכת הבאה: א. אין פתרון, ב. יש פתרון יחיד, ג. אינסוף פתרונות  
b. במקרה ג. מצא את הפתרון הכללי.

2. תהי  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- a. בעזרת שיטת גאוס מצא את  $A^{-1}$ .  
b. בשומוש a. כתוב את  $A^{-1}$  כמכפלה של מטריצות אלמטריות.

c. בשימוש  $A^{-1}$  מצא פתרון למערכת  $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

d. מצא את הדטרמיננטה  $|A|$ .

3.

a. בצעו תהליך גרם-שמידט בקבוצה  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  והעבר אותו לקבוצה

אורתונורמלית  $\{q_1, q_2, q_3\}$  הפורשת אותו מישור ב  $\mathbb{R}^3$ .

b. כתוב את הווקטור  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  כצירוף ליניארי של  $\{q_1, q_2, q_3\}$ .

4. תהי  $A = \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$ .

a. מצא את הערכים העצמיים של  $A$  ועבור כל אחד מצא ווקטור עצמי עבורו.

b. מצא לכסון  $A = SDS^{-1}$  למטריצה.

c. מצאו  $A^{101}$ .

d. האם ניתן לבחור  $S$  להיות מטריצה סימטרית? הסבר.

5. ענה אמת/שקר לכל סעיף. כל סעיף שווה 4 נקודות. רשום את תשובתך במחברת.

a. שני ווקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים שונים הם בלתי תלויים ליניאריים זה לזה.

b. יהיו  $v, w \in \mathbb{R}^n$  שני ווקטורים. אזי  $v^T w = 0$  אם ורק אם הם על אותו ישר.

c. יהיו  $A, B$  שתי מטריצות ריבועיות. אזי  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ .

d. תהי  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  (מטריצה חמש על חמש). אזי  $\det(-A) = -\det(A)$ .

e. תהי  $A$  מטריצה  $n \times n$ . נתון ש  $A^2 - 2A + 1 = 0$  אזי  $A$  מטריצה, אזי 1 הוא ערך עצמי של  $A$ .