

בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ"ה, מועד א' - פתרון

21.8.2025, כ"ז באב התשפ"ה

מרצים: אחיה בר-און, אריאל ויצמן, דן פלורנטיין, ארז שיינר.
מתרגלים: יחזקאל אימרה רגב, נמרוד נדבורני, שירה ידעי, הראל רוזנפלד, עידו פלדמן, בוריס גוליקוב, אביתר ישראל שויקה.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.

- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

1. (9 נקודות כל סעיף) תהינה A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הבאים:

(א) אם $(A \Delta B) \subseteq (A \Delta C)$ אז $B \subseteq C$.

פתרון: הפרכה: ניקח $A = B = \{1\}$ ו $C = \emptyset$. מתקיים כי $A \Delta B = A \Delta A = \emptyset$ ולכן $(A \Delta B) \subseteq (A \Delta C)$ אבל לא מתקיים $B \subseteq C$.

(ב) $(A \times B) \setminus (A \times C) = A \times (B \setminus C)$.

פתרון: הוכחה: הכלה דו-כיוונית:

בכיוון $(\subseteq)$: יהא $(x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$. צ"ל $(x, y) \in A \times (B \setminus C)$. נסיק כי

$$(x, y) \in (A \times B), (x, y) \notin A \times C$$

ולכן $x \in A, x \in B$ וגם $(x, y) \notin A \times C$ כיוון ש $x \in A$ נסיק ש $y \notin C$. לכן

$$x \in A, y \in B \setminus C$$

ולכן $(x, y) \in A \times (B \setminus C)$ כפי שרצינו.

בכיוון $(\supseteq)$: יהא $(x, y) \in A \times (B \setminus C)$. צ"ל $(x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$. נסיק כי

$$x \in A, y \in B \setminus C$$

ולכן $x \in A, y \in B, y \notin C$ מכאן ש $(x, y) \in A \times B$ וגם $(x, y) \notin A \times C$. לכן

$$(x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$$

כפי שרצינו.

(ג) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$.

פתרון: הוכחה: יהא $x \in A \cap (B \cup C)$. צ"ל $x \in (A \cap B) \cup C$. נסיק כי

$$x \in A, x \in B \cup C$$

ואז:

• אם $x \in B$ נקבל ש $x \in A \cap B$ ולכן $x \in (A \cap B) \cup C$.

• אם $x \in C$ נקבל ש $x \in (A \cap B) \cup C$.
בכל מקרה קיבלנו ש $x \in (A \cap B) \cup C$ וסיימנו.

2. (9 נקודות כל סעיף) שימו לב: במבחן הזה, 0 אינו מספר טבעי ($0 \notin \mathbb{N}$).
נגדיר פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow P(\mathbb{N})$ על ידי הכלל

$$f(x) = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{n-1} \leq x\}$$

נגדיר יחס T על $\mathbb{N}$ על ידי הכלל

$$xTy \iff f(x) = f(y)$$

ענו על הבאים:

(א) הוכיחו כי יחס שקילות על $\mathbb{N}$.

פתרון: נוכיח שהוא רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.

- רפלקסיבי: יהא a טבעי. מתקיים כי $f(a) = f(a)$ ולכן aTa .
- סימטרי: יהיו a, b טבעיים כך ש aTb . צ"ל bTa . כיוון ש aTb נסיק כי $f(a) = f(b)$ ולכן $f(b) = f(a)$ ולכן bTa .
- טרנזיטיבי: יהיו a, b, c טבעיים כך ש aTb ו bTc . צ"ל aTc . מההנחה נסיק ש $f(a) = f(b)$ וגם $f(b) = f(c)$ ולכן $f(a) = f(c)$. מכאן ש aTc כפי שרצינו.

(ב) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים

$$[2^n]_T = \{m \in \mathbb{N} \mid 2^n \leq m < 2^{n+1}\}$$

(כאשר $[2^n]_T$ היא מחלקת השקילות של המספר 2^n).

פתרון: יהא n טבעי. ונוכיח כי

$$[2^n]_T = \underbrace{\{m \in \mathbb{N} \mid 2^n \leq m < 2^{n+1}\}}_B$$

הוכחה: בהכלה דו-כיוונית. בכיוון ($\subseteq$): יהא $m \in [2^n]_T$. צ"ל $m \in B$. מהגדרת מחלקת שקילות, $mT2^n$ ולכן $f(m) = f(2^n)$. מתקיים כי

$$f(2^n) = \{k \in \mathbb{N} \mid 2^{k-1} \leq 2^n\} = \{1, \dots, n+1\}$$

ומכיוון ש $f(2^n) = f(m)$ נקבל ש $f(m) = \{1, \dots, n+1\}$. בפרט $2^{(n+1)-1} \leq m$. בנוסף $m < 2^{n+1}$ שהרי אם $2^{n+1} \leq m$ היינו מקבלים ש $n+2 \in f(m)$ ומקבלים סתירה. מכאן ש $m \in B$. בכיוון ($\supseteq$): יהא $m \in B$. צ"ל $m \in [2^n]_T$. שקול להוכיח $mT2^n$. כלומר, שקול להוכיח ש

$$f(m) = f(2^n) = \{1, \dots, n+1\}$$

אכן, מהגדרת B נקבל ש $2^n \leq m < 2^{n+1}$ ולכן לכל $1 \leq k \leq n+1$ מתקיים $2^{k-1} \leq 2^n \leq m$ ולכן $\{1, \dots, n+1\} \subseteq f(m)$. מצד שני, לכל $n+2 \leq t$ מתקיים $2^{t-1} \leq m < 2^{n+1}$ ולכן כל t כזה לא שייך ל $f(m)$. מכאן ש $f(m) = \{1, \dots, n+1\}$ וסיימנו.

3. (8 נקודות כל סעיף) שימו לב: במבחן הזה, 0 אינו מספר טבעי ($0 \notin \mathbb{N}$). נגדיר יחס על $A = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ כך fRg אם

$$(f = g) \vee (\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = f(n)g(n))$$

פתרון: לפי הסעיפים נשים לב לאפיון שקול של היחס. עבור שתי פונקציות $f, g \in A$ המקיימות כי fRg מתקיים

$$\forall n \in \mathbb{N} f(n) = f(n)g(n)$$

לכל n טבעי עבורו $f(n) \neq 0$ מתקיים כי $g(n) = 1$ (שהרי את המשוואה $f(n) = f(n)g(n)$ נוכל לחלק ב $f(n)$). לכל n טבעי עבורו $f(n) = 0$ נקבל כי $g(n)$ יכול להיות כל אחד מהערכים בטווח $\{0, 1, 2\}$. שהרי המשוואה $f(n)g(n) = 0$ היא $0 = 0$ ללא תלות בערך $g(n)$. מכאן ש: fRg אם ורק אם

$$\forall n \in \mathbb{N} : [f(n) \neq 0] \Rightarrow [g(n) = 1]$$

(א) הוכיחו ש R יחס סדר על A .

פתרון: נוכיח ש R רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי:

- רפלקסיבי: תהא $f \in A$. צ"ל fRf . לפי הגדרה R , כיוון ש $f = f$ נקבל ש fRf .
- אנטי-סימטרי: נניח $f, g \in A$ כך ש fRg וגם gRf . צ"ל $f = g$. נניח בשלילה כי $f \neq g$. ל f, g אותו תחום ואותו טווח. יהא $x \in \mathbb{N}$ ונוכיח כי $f(x) = g(x)$. מכך ש fRg וגם gRf (ו $f \neq g$) נסיק

$$\forall n \in \mathbb{N} f(n) = f(n)g(n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} g(n) = g(n)f(n)$$

ובפרט $f(x) = f(x)g(x)$ וגם $g(x) = g(x)f(x)$. נחלק:

- אם $g(x) = 0$ נקבל מכך ש $f(x) = f(x)g(x)$ כי $f(x) = 0$ ומכאן ש $f(x) = g(x)$.
- אם $g(x) = 1$ נקבל מכך ש $g(x) = g(x)f(x)$ כי $1 = f(x)$ ומכאן ש $f(x) = g(x)$.
- אם $g(x) = 2$ נקבל מכך ש $g(x) = g(x)f(x)$ כי $2 = 2f(x)$ ומכאן ש $f(x) = 1$. נסתכל על $f(x) = f(x)g(x)$ ונקבל ש $1 = g(x)$. קיבלנו מצד אחד ש $g(x) = 2$ ומצד שני ש $g(x) = 1$. סתירה. לכן מקרה זה לא ייתכן.

קיבלנו שה"כ ש $f = g$ וקיבלנו סתירה.

- R טרנזיטיבי: תהייה f, g, h כך ש fRg, gRh . צ"ל fRh .
- אם $f = g$ אז gRh פירושו fRh וסיימנו.
- אם $g = h$ אז fRg פירושו fRh וסיימנו.
- אחרת, $f \neq g$ וגם $g \neq h$ ונוכיח ש fRh באמצעות האיפיון השקול. יהא n טבעי. צ"ל אם $f(n) \neq 0$ אז $h(n) = 1$. נניח $f(n) \neq 0$ וצ"ל $h(n) = 1$. כיוון ש fRg ו $f(n) \neq 0$ נסיק ש $g(n) = 1$ (שוב, לפי האיפיון השקול). כעת, כיוון ש $g(n) = 1$ ובפרט $g(n) \neq 0$ ומכיוון ש gRh נקבל ש $h(n) = 1$ כפי שרצינו.

(ב) מצאו את כל האיברים המקסימאליים והאיברים המינימאליים בקבוצה A עם היחס R .

פתרון: טענה: הפונקציה $f_0 : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ המוגדרת על ידי הכלל $f_0(n) = 0$ היא איבר קטן ביותר. בפרט יש רק איבר מינימאלי יחיד שהוא f_0 . הוכחה: תהא $g \in A$ פונקציה. צ"ל f_0Rg . באופן שקול (מהאיפיון השקול) צ"ל כי לכל n טבעי, אם $f_0(n) \neq 0$ אז $g(n) = 1$. זה מתקיים שהרי אין n טבעי עבורו $f_0(n) \neq 0$ (והפסוק $\text{False} \rightarrow q$ תמיד נכון ללא תלות ב q).

טענה: טענה: הפונקציה $g_1 : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ המוגדרת על ידי הכלל $g_1(n) = 1$ היא איבר גדול ביותר. בפרט יש רק איבר מקסימאלי יחיד שהוא g_1 . הוכחה: תהא $f \in A$ פונקציה. צ"ל fRg_1 . באופן שקול (מהאיפיון השקול) צ"ל כי לכל n טבעי, אם $f(n) \neq 0$ אז $g_1(n) = 1$. זה מתקיים שהרי לכל n טבעי מתקיים $g_1(n) = 1$ (והפסוק $q \rightarrow \text{True}$ תמיד נכון ללא תלות ב q).

(ג) הוכיחו/הפריכו: היחס R הוא יחס סדר לינארי/קווי (כל קבוצה והמינוח שראתה בהרצאה) על A .

פתרון: הוא לא. נגדיר $h_2 : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ על ידי הכלל $h_2(n) = 2$. נגדיר $h_1 : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ על ידי

$$h_1(n) = \begin{cases} 2 & n \geq 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

מתקיים כי h_1, h_2 שונים ולא ברי השוואה. מתקיים כי $(h_1, h_2) \notin R$ שהרי עבור $n = 2$ מתקיים $h_2(2) = 2 \neq 0$

אבל $h_1(2) \neq 1$ (ואז לפי האפיון השקול). באופן דומה $(h_2, h_1) \notin R$ שהרי עבור $n = 2$ מתקיים $h_1(2) = 2 \neq 0$
אבל $h_2(2) \neq 1$.

4. (8 נקודות כל סעיף) תהא A קבוצה עם לפחות 3 איברים (כלומר $|A| \geq 3$). נסמן ב S את קבוצת כל תתי הקבוצות של A מעוצמה 2. תהינה f, g פונקציות מ A ל A . הוכיחו את הבאים:

(א) אם לכל $X \in S$ מתקיים $f[X] = g[X]$ אזי $f = g$.

פתרון: ל f, g אותו תחום ואותו טווח. יהא $x \in A$ צ"ל $f(x) = g(x)$. נניח בשלילה כי $f(x) \neq g(x)$. לכל $y \neq x$ מתקיים כי $\{x, y\} \in S$ ולכן

$$f[\{x, y\}] = g[\{x, y\}]$$

$$\{f(x), f(y)\} = \{g(x), g(y)\}$$

ומכיון ש $f(x) \neq g(x)$ נקבל ש $f(x) = g(y)$ ו $f(y) = g(x)$. כיוון ש A אינסופית, קיימים $y_1 \neq y_2$ ששניהם שונים מ x . לפי מה שקיבלנו, $f(y_1) = g(x) = f(y_2)$ וגם $g(y_1) = f(x) = g(y_2)$. הקבוצה $\{y_1, y_2\}$ שייכת ל S ולכן

$$f[\{y_1, y_2\}] = g[\{y_1, y_2\}]$$

$$\{f(y_1), f(y_2)\} = \{g(y_1), g(y_2)\}$$

אבל מקבלים

$$\{g(x)\} = \{f(x)\}$$

סתירה ($g(x) \neq f(x)$).

(ב) אם לכל $X \in S$ מתקיים $f^{-1}[X] = g^{-1}[X]$ אזי $f = g$.

פתרון: ל f, g אותו תחום ואותו טווח. יהא $x \in A$ צ"ל $f(x) = g(x)$. נניח בשלילה כי $f(x) \neq g(x)$. לכל $z \neq f(x)$ מתקיים $\{z, f(x)\}$ קבוצה ששייכת ל S . לכן

$$f^{-1}[\{z, f(x)\}] = g^{-1}[\{z, f(x)\}]$$

לפי הגדרת תמונה הפוכה, $x \in f^{-1}[\{z, f(x)\}]$ ולכן $x \in g^{-1}[\{z, f(x)\}]$. כיוון ש $g(x) \neq f(x)$ נקבל $g(x) = z$.

קיבלנו שלכל $z \neq f(x)$ מתקיים $g(x) = z$. כיוון ש A אינסופית, קיימים $z_1 \neq z_2$ ששניהם שונים מ $f(x)$, ונקבל $g(x) = z_1$ וגם $g(x) = z_2$ מה שסותר את חד-ערכיות הפונקציה g .

5. יחס S על $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ יקרא מגניב בריבוע אם לכל שני זוגות סדורים שונים $(a, b) \neq (c, d)$ ב S מתקיים

$$ad - bc \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

(א) (8 נקודות) תהא C קבוצה של יחסים מגניבים בריבוע (כלומר: לכל $S \in C$ מתקיים כי S מגניבה בריבוע). נתון כי C שרשרת ביחס להכלה (היינו: לכל $S_1, S_2 \in C$ מתקיים $S_1 \subseteq S_2$ או $S_2 \subseteq S_1$). הוכיחו כי איחוד היחסים ב C ,

$$Y = \bigcup_{S \in C} S$$

הוא יחס מגניב בריבוע גם כן.

פתרון: הוכחה: יהיו $(a, b) \neq (c, d)$ ב Y צ"ל $ad - bc \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. לפי הגדרת Y , קיימות $S_1, S_2 \in C$ כך ש $(a, b) \in S_1$ ו $(c, d) \in S_2$. כיוון ש C שרשרת, יש הכלה בין S_1, S_2 (באיזה שהוא כיוון). נניח כי $S_1 \subseteq S_2$ (אם דווקא $S_2 \subseteq S_1$ הוכחה זהה ובלבד שנחליף את התפקידים של S_1, S_2). מכאן ש $(a, b), (c, d) \in S_2$. כיוון ש S_2 מגניבה בריבוע ואלו זוגות שונים נקבל לפי הגדרה כי $ad - bc \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ כפי שרצינו.

(ב) (8 נקודות) הוכיחו שקיים יחס S מגניב בריבוע כך שלכל $(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ מתקיים

$$((a, b) \in S) \vee (\exists (c, d) \in S : ad - bc \in \mathbb{Q})$$

פתרון: נגדיר $\odot$ להיות קבוצת כל הקבוצות המגניבות בריבוע. נגדיר עליה את יחס ההכלה. לפי עקרון המקסימום של האוסדרוף קיימת $\odot \subseteq C$ שרשרת מקסימאלית. נגדיר

$$Y = \bigcup_{S \in C} S$$

איחוד כל הקבוצות בשרשרת. לפי סעיף קודם Y מגניבה בריבוע. טענה: Y מקיימת את המבוקש בשאלה: יהא $(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ונניח $(a, b) \notin Y$. צ"ל

$$\exists (c, d) \in Y : ad - bc \in \mathbb{Q}$$

ונניח בשלילה כי: לכל $(c, d) \in Y$ מתקיים $ad - bc \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. נגדיר את היחס

$$\hat{Y} = Y \cup \{(a, b)\}$$

ונגיע לסתירה (בסופו של דבר) למקסימאליות של C . נתחיל בכך שנטעון ש $\hat{Y}$ יחס מגניב בריבוע. הוכחה: יהיו $(x, y) \neq (z, w)$ ב $\hat{Y}$. כיוון ש $\hat{Y} = Y \cup \{(a, b)\}$ הוא איחוד של שני יחסים, נקבל את האפשרויות הבאות:

- אם שניהם ב Y נקבל (כי Y מגניבה בריבוע) ש $xw - yz \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 - אם אחד מהזוגות ב Y והשני שווה ל (a, b) , נקבל ש $xw - yz \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ מהנחת השלילה שלנו (מסומנת בירוק).
 - המקרה ששניהם שווים ל (a, b) לא אפשרי כי אלו זוגות שונים.
- טענה: $\hat{C} = C \cup \{\hat{Y}\}$ היא שרשרת של קבוצות מגניבות בריבוע, מכילה את C ושונה ממנה (ונקבל סתירה למקסימאליות של Y). הוכחה:

- $\hat{C}$ שרשרת של קבוצות מגניבות בריבוע: ראינו שכל הקבוצות ב $\hat{C}$ מגניבות בריבוע. כעת יהיו S_1, S_2 ב $\hat{C}$ ונראה שמתקיימת הכלה בניהם (באיזה שהוא כיוון). אם $S_1, S_2 \in C$ אז כיוון ש C שרשרת מתקיימת הכלה בניהם. אם שניהם שווים ל $\hat{Y}$ אז ברור שיש הכלה בניהם. אחרת, אחת מהן ב C והשניה שווה ל $\hat{Y}$. במקרה זה, נניח $S_1 \in C, S_2 = \hat{Y}$ (המקרה $S_2 \in C, S_1 = \hat{Y}$ דומה) ונקבל

$$S_1 \subseteq Y \subseteq \hat{Y} = S_2$$

- $\hat{C}$ מכילה את C ושונה ממנה. ברור לפי הגדרה כי $C \subseteq \hat{C}$. בנוסף, לכל $S \in C$ מתקיים

$$S \subseteq Y \subsetneq \hat{Y}$$

(שברי ב $\hat{Y}$ יש את האיבר (a, b) שלא שייך ל Y). מכאן ש $\hat{Y} \notin C$ ולכן $\hat{C} \neq C$.

(ג) יהא S יחס מגניב בריבוע מקסימאלי ביחס להכלה (כלומר לא קיים יחס מגניב בריבוע T המקיים $S \subsetneq T$ ו $T \neq S$).
i. (5 נקודות) נגדיר

$$D = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid (1, x) \notin S\}$$

הוכיחו כי $|D| \leq |S| \cdot \aleph_0$. רמז: הקבוצה

$$\left\{ \frac{d-q}{c} \mid (c, d) \in S, q \in \mathbb{Q} \right\}$$

יכולה לעזור.

פתרון: ראינו בסעיף הקודם שעבור S יחס מגניב בריבוע מקסימאלי מתקיים שלכל $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ מתקיים

$$((a, b) \in S) \vee (\exists (c, d) \in S : ad - bc \in \mathbb{Q})$$

כלומר לכל $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, במידה ו $(1, x) \notin S$ אזי קיים $(c, d) \in S$ המקיים $d - xc \in \mathbb{Q}$. כלומר קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש $d - xc = q$ או באופן שקול $(c \neq 0)$ $x = \frac{d-q}{c}$.
נגדיר:

$$f : S \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

על ידי הכלל $f((c, d), q) = \frac{d-q}{c}$ ומכאן נקבל, לפי ההסבר לעיל כי $D \subseteq \text{Img}(f)$ מסקנה:

$$|\text{Img}(f)| \leq |S \times \mathbb{Q}|$$

שהרי $f : S \times \mathbb{Q} \rightarrow \text{Img}(f)$ היא פונקציה על. בנוסף, $|D| \leq |\text{Img}(f)|$ (שהרי $D \subseteq \text{Img}(f)$) ולכן:

$$|D| \leq |S \times \mathbb{Q}| = |S| \cdot \aleph_0$$

כפי שרצינו.

ii. (4 נקודות) הוכיחו כי S אינו בן מנייה.

פתרון: נניח בשלילה כי S בת מנייה ונקבל ש $\aleph_0 \leq |S| \cdot \aleph_0 \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. לכן המשלים של D ,

$$D^c = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid (1, x) \in S\}$$

לא בת מנייה. שהרי $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ לא בת מנייה והיא שווה לאיחוד $D \cup D^c$ (ואיחוד של שני קבוצות בנות מנייה היא בת מנייה). כמובן שהפונקציה $g : D^c \rightarrow S$ המוגדרת $g(x) = (1, x)$ היא חח"ע ולכן $|D^c| \leq |S|$. $\aleph_0 < |D^c| \leq |S|$. מכאן ש S אינה בת מנייה. סתירה.