חשבון אינפי 1
תרגיל 9 - פתרון

1. סווגו את כל נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

א. $$f(x)=\begin{cases} x-5 & x\le 1 \\ \dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1} & x>1 \end{cases}$$

פתרון :

נקודה חשודה לאי-רציפות $x=1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-5)=-4$$

$\Leftarrow$ $x=1$ נקודת אי רציפות מסוג I (קפיצה) .בשאר הנקודות הפונקציה רציפה .

ב. $$f(x)=x\cos\frac{1}{x}$$

פתרון :

$$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0$$

הסבר : $$0\le\left|x\cos\frac{1}{x}\right|\le|x|$$

$$\downarrow x\to 0$$

$\Leftarrow$ לפי כלל הסנדוויץ' $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0$

$\Leftarrow$ $x=0$ נקודת אי רציפות סליקה .

ג. $$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$$

פתרון :

ניקח $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{1}{\pi n}\right\}_{n=1}^{\infty}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\sin\frac{1}{x_n}=0$$

עבור $\{x_n'\}=\left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right\}_{n=1}^{\infty}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n'}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\infty$$

$\Leftarrow$ הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ אינו קיים , ולכן $x=0$ נקודת אי רציפות מסוג שני של הפונקציה $f\left(x\right)$.

ד. $f\left(x\right)=\dfrac{1-\cos 2x}{5x}$

פתרון :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5}\sin x\frac{\sin x}{x}=0$$

$\Leftarrow x=0$ נקודת אי רציפות סליקה .

ה. $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

פתרון :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=0$$

$\Leftarrow x=0$ נקודת אי רציפות סליקה .

ו. $f\left(x\right)=\dfrac{\sin^2 x}{\cos 2x-1}$

פתרון :

נקודות אי רציפות

$$\cos 2x=1$$
$$2x=2\pi n$$
$$x=\pi n \quad n\in\mathbb{Z}$$

$$\lim_{x\to\pi n}\frac{\sin^2 x}{\cos 2x-1}=\lim_{x\to\pi n}\frac{\sin^2 x}{-2\sin^2 x}=-\frac{1}{2}$$

$\Leftarrow x=\pi n \quad n\in\mathbb{Z}$ נקודות אי רציפות סליקה .

ז. $f(x)=\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$

פתרון :

נקודות אי רציפות הן $x=\pm 2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{7+x}-3\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{7+x-9}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(x+2\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\frac{1}{24}$$

הגבול קיים וסופי ולכן $x=2$ נקודת אי רציפות סליקה .

$\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\infty$ ולכן $x=2$ נקודת אי רציפות מסוג שני .
בשאר הנקודות הפונקציה רציפה כהרכבה, ומנה של פונקציות רציפות.

ח. $f\left(x\right)=\sin\left(\ln x^2\right)$

פתרון :
לפונקציה יש נקודת אי רציפות ב- $x=0$, כי log לא מוגדר שם, בכל מקום אחר רציפה כהרכבה של פונק' רציפות.

$$\lim_{x\to 0^-}\sin\left(\ln(x^2)\right)=\lim_{x\to 0^+}\sin\left(\ln(x^2)\right)=\lim_{\ln(x^2)=t\to-\infty}\sin\left(t\right)$$

כלומר שני הגבולות החד צדדיים לא קיימים, ולכן זוהי נק' אי רציפות מסוג שני.

ט. $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{\sin x}}$

פתרון :
שוב, הפונק' לא מוגדרת עבור $x=\pi k$ כאשר $k\in\mathbb{Z}$. נבדוק מה קורה ב-0:

$$\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{\sin(x)}}=\infty,\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{\sin(x)}}=0$$

כלומר, אחד הגבולות לא סופי ולכן זוהי נקודת אי רציפות מסוג שני. זה יקרה בצורה דומה בכל $x=\pi k$, ולכן כל נקודה כזאת היא נק' אי רציפות מסוג 2. (ההבדל הוא שלפעמים הגבול משמאל יהיה 0 והגבול מימין אינסוף, ולפעמים ההפך).

2. מצאו (אם ניתן) את ערכו של הפרמטר a כך שהפונקציה

$$f\left(x\right)=\begin{cases}5x+2 & x\le 0\\ \dfrac{\sqrt{1+ax^2}-\cos x}{x^2} & x>0\end{cases}$$

תהיה רציפה.

פתרון :

ע"מ שהפונקציה תהיה רציפה, נדרוש כי $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(5x+2)=2=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+ax^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{1+ax^2}-\cos x\right)\left(\sqrt{1+ax^2}+\cos x\right)}{x^2\left(\sqrt{1+ax^2}+\cos x\right)}=$$

$$.=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+ax^2-\cos^2 x}{x^2\left(\sqrt{1+ax^2}+\cos x\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2+\sin^2 x}{x^2\left(\sqrt{1+ax^2}+\cos x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2}{x^2\left(\sqrt{1+ax}+\cos x\right)}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2\left(\sqrt{1+ax^2}+\cos x\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{a}{\sqrt{1+ax^2}+\cos x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+ax^2}+\cos x}=\frac{a}{1+1}+1\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}$$

כלומר, ערכו של הקבוע a צריך להיות שווה ל-3 (כי נדרוש: $2=\frac{a+1}{2}$).

3. הוכיחו, כי אם $f\left(x\right)$ רציפה בקטע $[a,b]$ ולכל $q\in\mathbb{Q}$ כך ש-$a\le q\le b$ מתקיים $f\left(q\right)=0$, אזי $f\left(x\right)\equiv 0$ ב-$[a,b]$.

פתרון :

נניח בשלילה כי קיימת נקודה $x_0\in[a,b]$ כך ש-$x_0\notin\mathbb{Q}$ וכן $f(x_0)\neq 0$.

לפי הגדרת היינה, מרציפות של f בנקודה x_0 נובע שלכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$ מתקיים: $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

נתבונן בסדרה: $x_n=\frac{\left[x_0\cdot 10^n\right]}{10^n}$. סדרה זו שואפת ל-x_0 , אבל $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$, כי x_n זו סדרה רציונאלית. אז קיבלנו לפי היינה כי $f(x_0)=0$ בסתירה להנחה, לכן $f\equiv 0$.

4. תהיינה f,g פונקציות המוגדרות בסביבת הנקודה x_0 וכן $f\left(x\right)$ רציפה ב-x_0 ו-$g\left(x\right)$ אינה רציפה ב-x_0 . הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f\cdot g$ רציפה ב-x_0 , אז $f\left(x_0\right)=0$

הטענה נכונה

הוכחה :

נניח בשלילה כי $f\left(x_0\right)\neq 0$. $f\cdot g$ רציפה ב-x_0 ולכן קיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f\cdot g$, וכן מתקיים $\lim_{x\to x_0} f\cdot g=\left(f\cdot g\right)\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)g\left(x_0\right)$.

$f\left(x\right)$ רציפה בסביבת הנקודה x_0 , ולכן $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)\neq 0$.

$\Leftarrow \lim_{x\to x_0} f\cdot g = f(x_0)\lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)g(x_0)$

מאחר ו- $f(x_0)\neq 0$, נקבל $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$

$\lim_{x\to x_0} g(x)$ קיים וסופי (כי $\lim_{x\to x_0} f\cdot g$ קיים וסופי וכן $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq 0$) וגם $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$

$\Leftarrow g(x)$ רציפה ב- x_0 - סתירה .

ב. אם $f(x_0)=0$, אז $f\cdot g$ רציפה ב- x_0 .

הטענה לא נכונה.
דוגמא נגדית:

$f(x)=x$ רציפה בסביבת $x=0$, וכן $f(0)=0$.

$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ אינה רציפה ב- $x=0$, אך מוגדרת ב- $x=0$.

$f\cdot g=\begin{cases}x\cdot\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0\cdot 1 & x=0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ לא רציפה ב- $x=0$.

ג. אם $f(x_0)=0$ ו- g חסומה בסביבה של x_0 , אז $f\cdot g$ רציפה ב- x_0 .

הטענה נכונה
הוכחה :

$f(x)$ רציפה בסביבת הנקודה x_0 ו- $f(x_0)=0$, ולכן $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$.

$g(x)$ חסומה בסביבת הנקודה x_0 .

ולכן קיים $M\geq 0$, כך ש- $|g(x)|\leq M$ בסביבת הנקודה x_0 . אם כן , בסביבת הנקודה x_0 מתקיים

$0\leq |f\cdot g| = |f|\cdot|g| \leq |f|\cdot M \underset{x\to x_0}{\to} 0$

$\underset{0}{\downarrow} x\to x_0$

$\Leftarrow \lim_{x\to x_0} f\cdot g = 0$

וכן $(f\cdot g)(x_0) = f(x_0)g(x_0) = 0$

$\lim_{x\to x_0} f\cdot g = (f\cdot g)(x_0) = 0 \Leftarrow f\cdot g$ רציפה ב- x_0 .

5. הוכיחו:

א. $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ רציפה במ"ש ב-$(0,1]$

הוכחה :

נגדיר פונקציה חדשה $g(x)$:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & ,x\in(0,1] \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$$

$g(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$, כיוון ש $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$, לכן $g(x)$ רציפה במ"ש בקטע $[0,1]$.

$f(x)$ שונה מ $g(x)$ רק בנקודה אחת, שאיננה משפיעה על רציפות במ"ש, לכן רציפות במ"ש של $g(x)$ גוררת רציפות במ"ש של $f(x)$.

ב. $f(x)=e^x$ לא רציפה במ"ש ב- $(0,\infty)$

הוכחה :

מספיק להראות שקיימות שתי סדרות $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $|x_n-y_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, אבל $|f(x_n)-f(y_n)|\not\to 0$.

ניקח $\{x_n\}=\{\ln(n+2)\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\ln(n+1)\}_{n=1}^{\infty}$.

$$|x_n-y_n|=|\ln(n+2)-\ln(n+1)|=\left|\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$ אבל,

$$|f(x_n)-f(y_n)|=\left|e^{\ln(n+2)}-e^{\ln(n+1)}\right|=|(n+2)-(n+1)|=1\not\to 0$$

ולכן הפונקציה לא רציפה במ"ש ב- $(0,\infty)$

ג. $f(x)=\cos(x^2)$ לא רציפה במ"ש ב- $[1,\infty)$

הוכחה :

ד. ניקח 2 סדרות : $y_n=\sqrt{2\pi n-\pi}$, $x_n=\sqrt{2\pi n}$.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2\pi n}-\sqrt{2\pi n-\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2\pi n}+\sqrt{2\pi n-\pi}}\right)=0$$ וכן x_n ו- y_n

נותנים ערכים בין 1 ל- ∞ . אבל

$$\left|\cos(x_n^2)-\cos(y_n^2)\right|=\left|\cos\left(\sqrt{2\pi n}\right)^2-\cos\left(\sqrt{2\pi n-\pi}\right)^2\right|$$

$$=\left|\cos(2\pi n)-\cos(2\pi n-\pi)\right|=|1-(-1)|=2\not\to 0$$

ולכן הפונקציה $f(x)=\cos(x^2)$ לא רציפה במ"ש ב- $[1,\infty)$