

אלגברה מופשטת 3 - תרגיל 6

1. הראו שאם $E \supseteq B \supseteq F$ שדות כך ש E/F היא הרחבת גלואה, אזי E/B היא הרחבת גלואה.
2. הראו שאם $\rho_n \in E - F$ שורש יחידה n -י פרימיטיבי, אזי לכל $\sigma \in Gal(E/F)$ מתקיים ש $\sigma(\rho_n)$ הוא שורש יחידה פרימיטיבי (תזכורת: שורש יחידה n -י נקרא פרימיטיבי אם הוא יוצר את חבורת שורשי היחידה ה- n ים).
3. תהי E/F הרחבת גלואה, ויהיו B, C שדות ביניים (כלומר $E \supseteq B, C \supseteq F$). הראו שמתקיים:
 - א. $Gal(E/B) \vee Gal(E/C) = Gal(E/B \cap C)$
 - ב. $Gal(E/B) \cap Gal(E/C) = Gal(E/B \vee C)$
4.
 - א. הראו שכל הרחבה מדרגה 2 של שדה ממאפיין שונה מ 2 היא הרחבת גלואה.
 - ב. הראו ש"יחס הרחבת גלואה" אינו טרנזיטיבי; כלומר אם $E/B, B/F$ אזי לא בהכרח מתקיים E/F היא הרחבת גלואה (יש להראות דוגמה נגדית).
5. מצאו את חבורת גלואה של $x^4 + 1$ מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ והציגו את פעולת החבורה על השורשים כתמורות.
6. יהי $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.
 - א. הראו ש $f(x)$ הוא פולינום מינימלי של $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ בעזרת חבורת גלואה $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})$.
 - ב. הציגו את פעולת חבורת גלואה על השורשים של $f(x)$ כתת-חבורה של S_4 .
 - ג. הראו של $f(x), g(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3) \in \mathbb{Q}[x]$ יש את אותו שדה פיצול ואותה חבורת גלואה, אך חבורת הגלואה פועלת שונה על שורשיהם.