וקטורים – בגישה משולבת
שאלון 035807
חלק א

ד״ר נעמי צ׳יזיק

תשע״ז

מפגש 6 נצרת עילית

תרגיל **להגשה**

(רימון ועמיצור, עמ' 80)

50. הוכח כי $\left(\vec{CA}-\vec{CB}\right)\bullet\left(\vec{CA}+\vec{CB}\right)=0$ אם ורק
אם ΔABC שווה שוקיים.
מהו המשפט הגיאומטרי שהוכחת?

- תרגיל (רימון ועמיצור, עמ' 80)

51.# הוכח כי משולש הוא שווה שוקיים אם ורק אם שני
תיכונים במשולש שווים זה לזה.

ועוד :

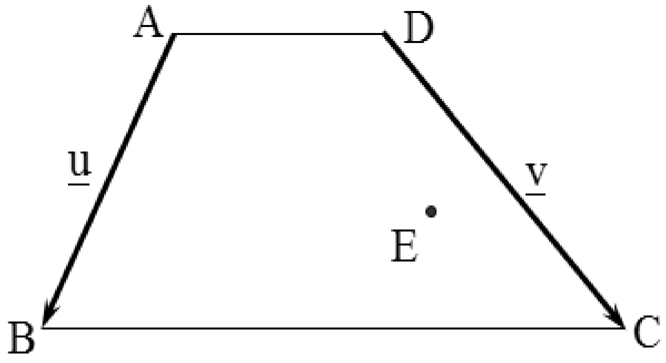
אתגר 5 / מט״ח

http://ebagcourses.cet.ac.il/%D7%94%D7%90%D7%AA%D7%92%D7%A85/

תרגיל 1 | פתרון סעיף ב

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$$

בטרפז ABCD (AD || BC) נתון: BC =3AD. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$ (ראו ציור).



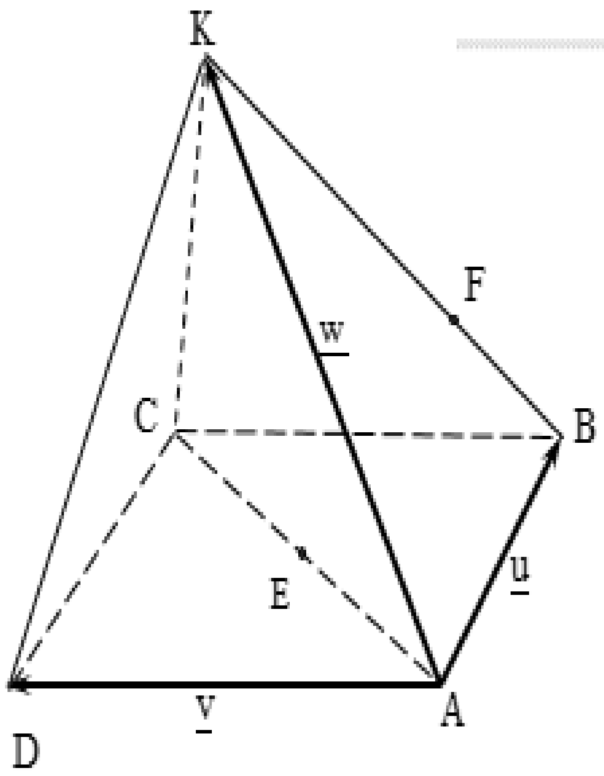
א- הביעו באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{AD}$.

ב- הוכיחו כי הנקודה E המקיימת $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{6}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$ נמצאת על האלכסון AC של הטרפז.

פתרון סעיף ב:

- מה דעתכם, כיצד נוכל להוכיח כי E נמצאת על AC?

תרגיל 2



בפירמידה מרובעת KABCD נסמן : $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ ו- $\overrightarrow{AK} = \underline{w}$.

הנקודה E היא אמצע האלכסון AC. הנקודה F מקיימת: $\overrightarrow{KF} = t\overrightarrow{KB}$

כמו כן נתון כי $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AD}$ $(s > 0)$.

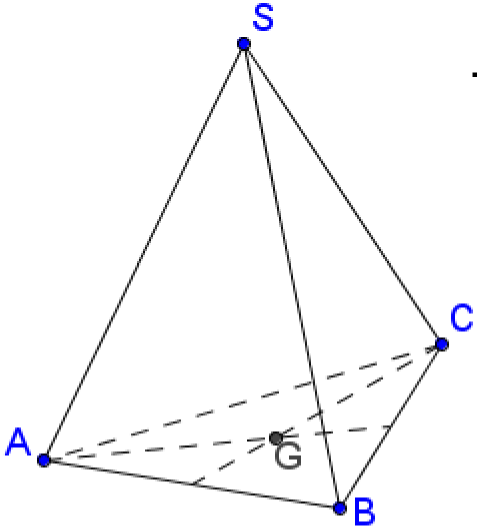
א- הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- t , s את הווקטורים $\overrightarrow{KF}$, $\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{EF}$.

ב- מצאו לאילו ערכי t ו- s הישרים EF ו- DK מקבילים.

ג- מה המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלתם בסעיף ב'?

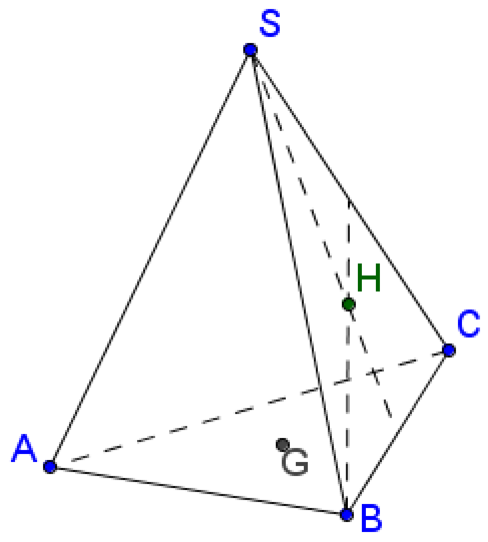
- האם לפי הנתון בסיס הפירמידה הוא מקבילית?

תרגיל 3



הנקודה G היא נקודת חיתוך התיכונים של הבסיס ABC בפירמידה המשולשת SABC.

תרגיל 3



הנקודה G היא נקודת חיתוך התיכונים של הבסיס ABC בפירמידה המשולשת SABC

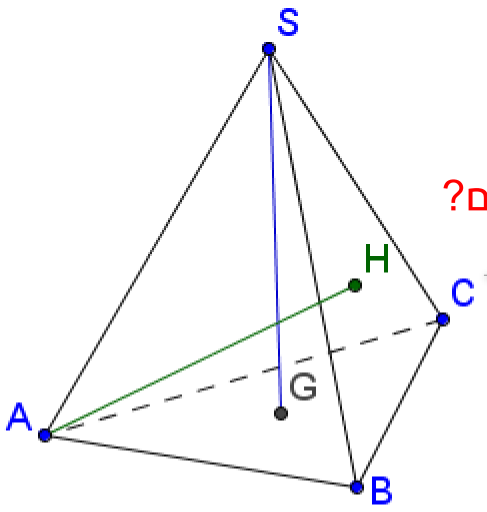
הנקודה H היא נקודת חיתוך התיכונים של הפאה SBC.

תרגיל 3 | שאלה

הנקודה G היא נקודת חיתוך התיכונים של הבסיס ABC בפירמידה המשולשת SABC.

הנקודה H היא נקודת חיתוך התיכונים של הפאה SBC.

שאלה: האם בכל פירמידה SG ו-AH נחתכים? או הם יכולים להיות על ישרים מצטלבים?

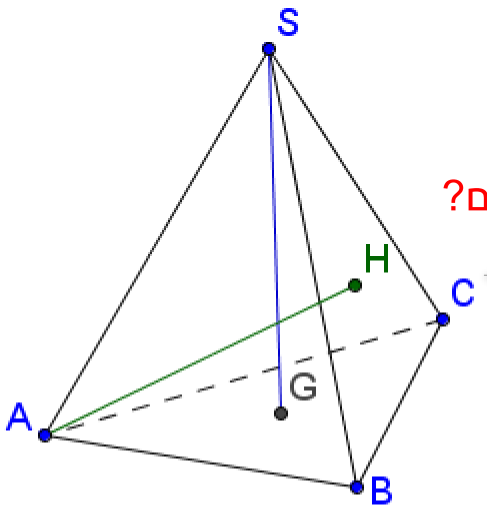


תרגיל 3 | שאלה

הנקודה G היא נקודת חיתוך התיכונים של הבסיס ABC בפירמידה המשולשת SABC.

הנקודה H היא נקודת חיתוך התיכונים של הפאה SBC.

שאלה: האם בכל פירמידה SG ו-AH נחתכים? או הם יכולים להיות על ישרים מצטלבים?

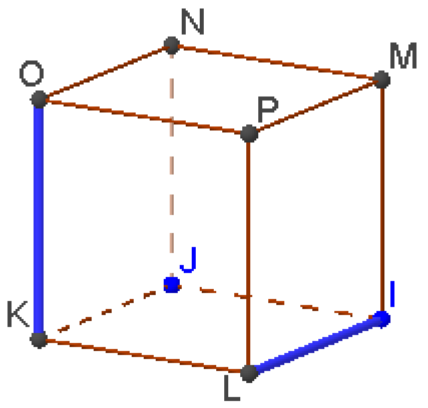


תזכורת:

ישרים מצטלבים הם ישרים שאינם במישור אחד.

לדוגמא: הצלעות LI ו-KO בתיבה המשורטטת

נמצאות על ישרים מצטלבים.



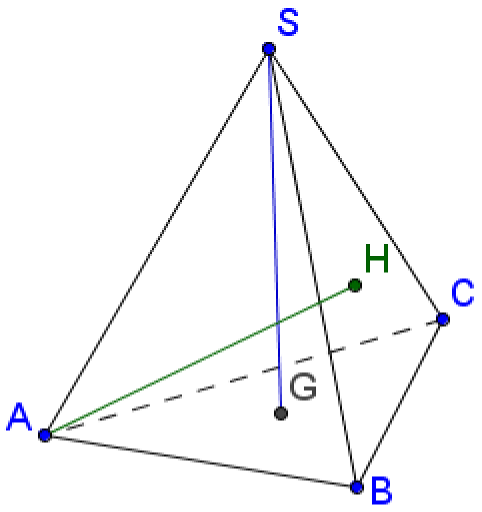
תרגיל 3 | הצהרת תכלית

הנקודה G היא נקודת חיתוך התיכונים של הבסיס ABC בפירמידה המשולשת SABC.

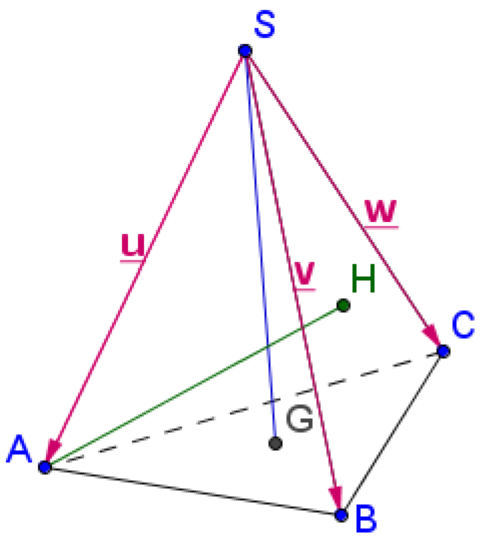
הנקודה H היא נקודת חיתוך התיכונים של הפאה SBC.

בתרגיל זה נוכיח כי בכל פירמידה, AH ו-SG נחתכים ונמצא באיזה יחס

מחלקת נקודת החיתוך את כל אחד מהם.



תרגיל 3 | סעיף א



- הנקודה G היא נקודת חיתוך התיכונים של הבסיס ABC בפירמידה המשולשת SABC.

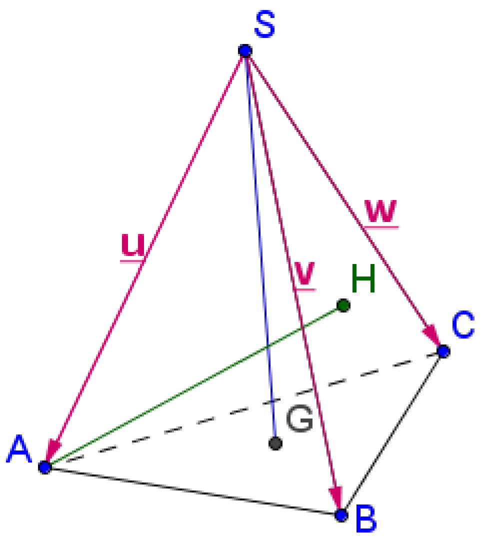
הנקודה H היא נקודת חיתוך התיכונים של הפאה SBC.

בתרגיל זה נוכיח כי בכל פירמידה, AH ו-SG נחתכים ונמצא באיזה יחס

מחלקת נקודת החיתוך את כל אחד מהם. נגדיר: $\underline{u} = \overrightarrow{SA}$, $\underline{v} = \overrightarrow{SB}$, $\underline{w} = \overrightarrow{SC}$

א- הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{SG}$, $\overrightarrow{AH}$.

תרגיל 3 | סעיף א - תשובה



- הנקודה G היא נקודת חיתוך התיכונים של הבסיס ABC בפירמידה המשולשת SABC.

הנקודה H היא נקודת חיתוך התיכונים של הפאה SBC.

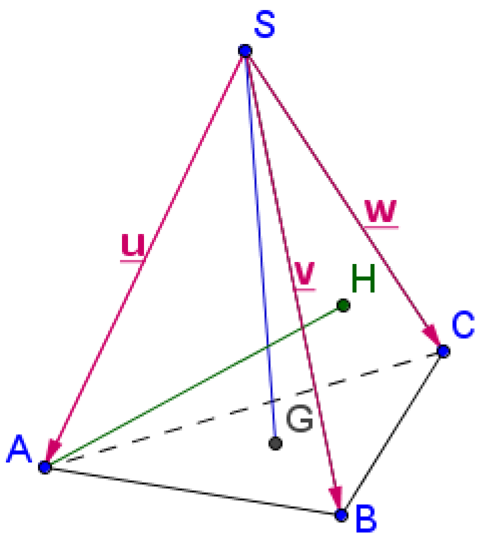
בתרגיל זה נוכיח כי בכל פירמידה, AH ו-SG נחתכים ונמצא באיזה יחס

מחלקת נקודת החיתוך את כל אחד מהם. נגדיר: $\overrightarrow{SC} = \underline{w}$, $\overrightarrow{SB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{SA} = \underline{u}$

א- הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{SG}$, $\overrightarrow{AH}$.

$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$ (נמקו).

תרגיל 3 | סעיף א - תשובה



- הנקודה G היא נקודת חיתוך התיכונים של הבסיס ABC בפירמידה המשולשת SABC.

הנקודה H היא נקודת חיתוך התיכונים של הפאה SBC.

בתרגיל זה נוכיח כי בכל פירמידה, AH ו-SG נחתכים ונמצא באיזה יחס

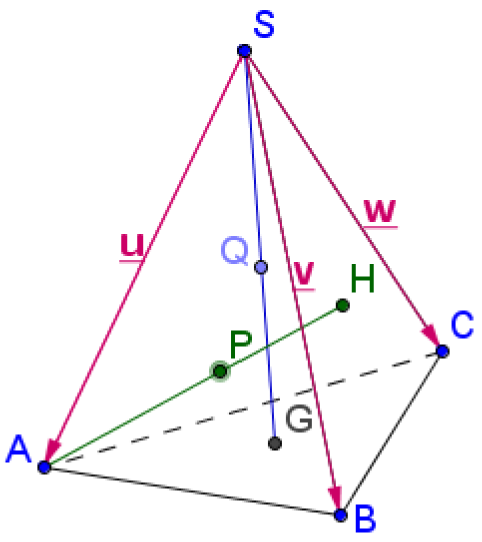
מחלקת נקודת החיתוך את כל אחד מהם. נגדיר: $\underline{u} = \overrightarrow{SA}$, $\underline{v} = \overrightarrow{SB}$, $\underline{w} = \overrightarrow{SC}$

א- הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{SG}$, $\overrightarrow{AH}$.

$$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}-\underline{u}+\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SC})$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}(-3\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$$



- הנקודה G היא נקודת חיתוך התיכונים של הבסיס ABC בפירמידה המשולשת SABC.

הנקודה H היא נקודת חיתוך התיכונים של הפאה SBC.

בתרגיל זה נוכיח כי בכל פירמידה, AH ו-SG נחתכים ונמצא באיזה יחס

מחלקת נקודת החיתוך את כל אחד מהם. נגדיר: $\underline{u} = \overrightarrow{SA}$, $\underline{v} = \overrightarrow{SB}$, $\underline{w} = \overrightarrow{SC}$

א- הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{SG}$, $\overrightarrow{AH}$.

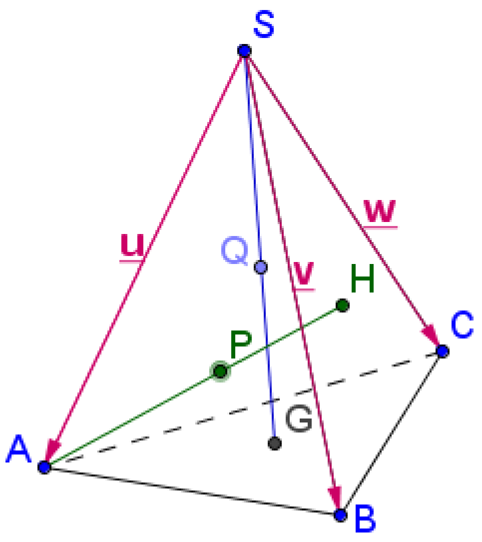
$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$ $\quad$ $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}(-3\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$

ב- נסמן נקודה P על AH המקיימת $\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AH}$ ונקודה Q על SG המקיימת $\overrightarrow{SQ} = x\overrightarrow{SG}$

נבדוק האם הנקודות P ו-Q יכולות להתלכד. אם כן, הרי תהיה נקודה משותפת ל-AH ול-SG.

הביעו את $\overrightarrow{SQ}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-x.

תרגיל 3 | סעיף ב - תשובה



- הנקודה G היא נקודת חיתוך התיכונים של הבסיס ABC בפירמידה המשולשת SABC.

הנקודה H היא נקודת חיתוך התיכונים של הפאה SBC.

בתרגיל זה נוכיח כי בכל פירמידה, AH ו-SG נחתכים ונמצא באיזה יחס

מחלקת נקודת החיתוך את כל אחד מהם. **נגדיר:** $\underline{u}=\overrightarrow{SA}$, $\underline{v}=\overrightarrow{SB}$, $\underline{w}=\overrightarrow{SC}$

א- הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{SG}$, $\overrightarrow{AH}$.

$\overrightarrow{SG}=\frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$ $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}(-3\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$

ב- נסמן נקודה P על AH המקיימת $\overrightarrow{AP}=y\overrightarrow{AH}$ ונקודה Q על SG המקיימת $\overrightarrow{SQ}=x\overrightarrow{SG}$

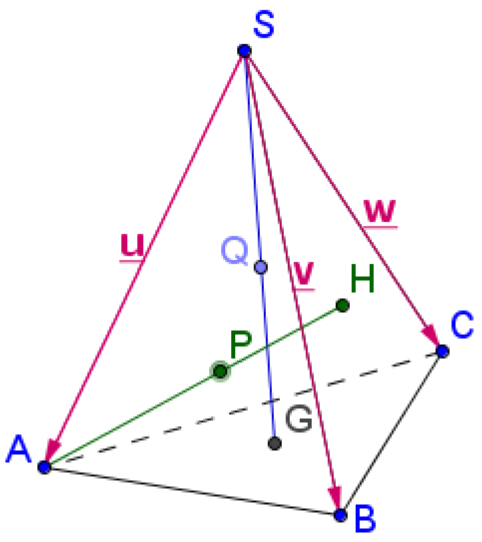
נבדוק האם הנקודות P ו-Q יכולות להתלכד. אם כן, הרי תהיה נקודה משותפת ל-AH ול-SG.

הביעו את $\overrightarrow{SQ}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-x.

$$\boxed{\overrightarrow{SQ}=x\overrightarrow{SG}=x\frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})=\frac{x}{3}\underline{u}+\frac{x}{3}\underline{v}+\frac{x}{3}\underline{w}}$$

הביעו את $\overrightarrow{SP}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-y.

תרגיל 3 | סעיף ב - תשובה



- הנקודה G היא נקודת חיתוך התיכונים של הבסיס ABC בפירמידה המשולשת SABC.

הנקודה H היא נקודת חיתוך התיכונים של הפאה SBC.

בתרגיל זה נוכיח כי בכל פירמידה, AH ו-SG נחתכים ונמצא באיזה יחס

מחלקת נקודת החיתוך את כל אחד מהם. **נגדיר:** $\underline{u}=\overrightarrow{SA}$, $\underline{v}=\overrightarrow{SB}$, $\underline{w}=\overrightarrow{SC}$

א- הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{SG}$, $\overrightarrow{AH}$.

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}(-3\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}) \qquad \overrightarrow{SG}=\frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$$

ב- נסמן נקודה P על AH המקיימת $\overrightarrow{AP}=y\overrightarrow{AH}$ ונקודה Q על SG המקיימת $\overrightarrow{SQ}=x\overrightarrow{SG}$

נבדוק האם הנקודות P ו-Q יכולות להתלכד. אם כן, הרי תהיה נקודה משותפת ל-AH ול-SG.

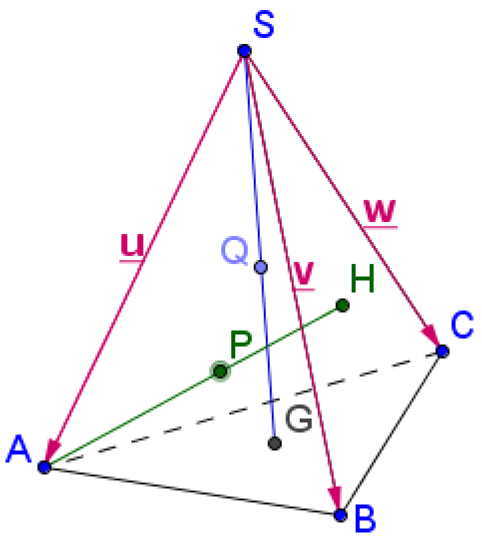
הביעו את $\overrightarrow{SQ}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-x.

$$\boxed{\overrightarrow{SQ}=x\overrightarrow{SG}=x\frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})=\frac{x}{3}\underline{u}+\frac{x}{3}\underline{v}+\frac{x}{3}\underline{w}}$$

הביעו את $\overrightarrow{SP}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-y.

$$\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AP}=\underline{u}+y\overrightarrow{AH}=\underline{u}+y\left(-\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}\right) \qquad \boxed{\overrightarrow{SP}=(1-y)\underline{u}+\frac{y}{3}\underline{v}+\frac{y}{3}\underline{w}}$$

תרגיל 3 | סעיף ג



- הנקודה G היא נקודת חיתוך התיכונים של הבסיס ABC בפירמידה המשולשת SABC.

הנקודה H היא נקודת חיתוך התיכונים של הפאה SBC.

בתרגיל זה נוכיח כי בכל פירמידה, AH ו-SG נחתכים ונמצא באיזה יחס

מחלקת נקודת החיתוך את כל אחד מהם. **נגדיר:** $\underline{u} = \overrightarrow{SA}$, $\underline{v} = \overrightarrow{SB}$, $\underline{w} = \overrightarrow{SC}$

א- הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{SG}$, $\overrightarrow{AH}$.

$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$ $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}(-3\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$

ב- נסמן נקודה P על AH המקיימת $\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AH}$ ונקודה Q על SG המקיימת $\overrightarrow{SQ} = x\overrightarrow{SG}$

נבדוק האם הנקודות P ו-Q יכולות להתלכד. אם כן, הרי תהיה נקודה משותפת ל-AH ול-SG.

ג- קיבלנו: $\boxed{\overrightarrow{SP} = (1-y)\underline{u} + \frac{y}{3}\underline{v} + \frac{y}{3}\underline{w}}$ $\boxed{\overrightarrow{SQ} = \frac{x}{3}\underline{u} + \frac{x}{3}\underline{v} + \frac{x}{3}\underline{w}}$

האם P ו-Q יכולות להתלכד? שאלה זו שקולה לשאלה האם יתכן כי: $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SQ}$?

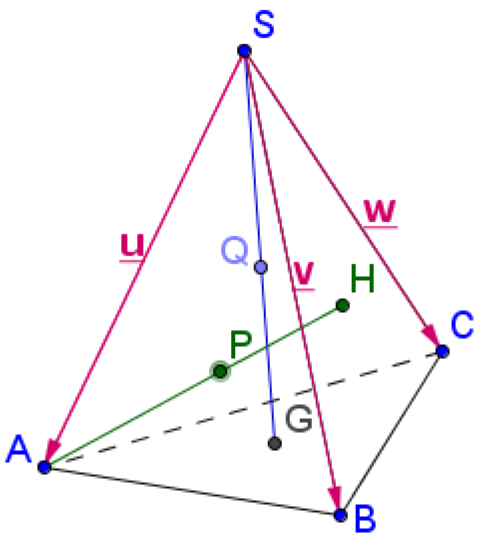
תרגיל 3 | סעיף ג

- הנקודה G היא נקודת חיתוך התיכונים של הבסיס ABC בפירמידה המשולשת SABC.

הנקודה H היא נקודת חיתוך התיכונים של הפאה SBC.

בתרגיל זה נוכיח כי בכל פירמידה, AH ו-SG נחתכים ונמצא באיזה יחס

מחלקת נקודת החיתוך את כל אחד מהם. **נגדיר:** $\underline{u}=\overrightarrow{SA}$, $\underline{v}=\overrightarrow{SB}$, $\underline{w}=\overrightarrow{SC}$



א- הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{SG}$, $\overrightarrow{AH}$.

$\overrightarrow{SG}=\frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$ $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}(-3\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$

ב- נסמן נקודה P על AH המקיימת $\overrightarrow{AP}=y\overrightarrow{AH}$ ונקודה Q על SG המקיימת $\overrightarrow{SQ}=x\overrightarrow{SG}$

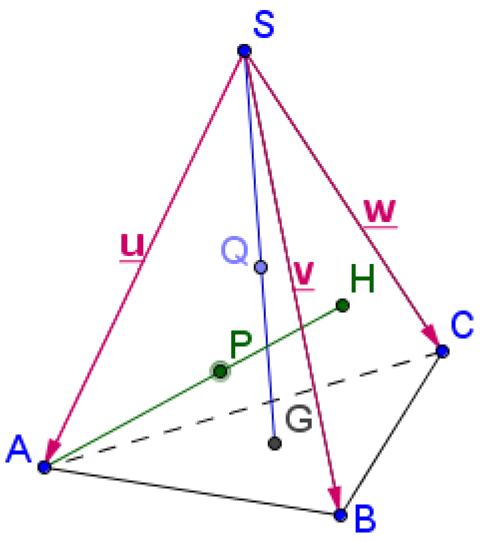
נבדוק האם הנקודות P ו-Q יכולות להתלכד. אם כן, הרי תהיה נקודה משותפת ל-AH ול-SG.

ג- קיבלנו: $\boxed{\overrightarrow{SP}=(1-y)\underline{u}+\frac{y}{3}\underline{v}+\frac{y}{3}\underline{w}}$ $\boxed{\overrightarrow{SQ}=\frac{x}{3}\underline{u}+\frac{x}{3}\underline{v}+\frac{x}{3}\underline{w}}$

לפי חד-ערכיות ההצגה $\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{SQ}$ אם ורק אם

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{3}=1-y\\ \frac{x}{3}=\frac{y}{3}\end{array}\right\}$$

תרגיל 3 | סעיף ג - פתרון



- הנקודה G היא נקודת חיתוך התיכונים של הבסיס ABC בפירמידה המשולשת SABC.

הנקודה H היא נקודת חיתוך התיכונים של הפאה SBC.

בתרגיל זה נוכיח כי בכל פירמידה, AH ו-SG נחתכים ונמצא באיזה יחס

מחלקת נקודת החיתוך את כל אחד מהם. **נגדיר:** $\underline{u} = \overrightarrow{SA}$, $\underline{v} = \overrightarrow{SB}$, $\underline{w} = \overrightarrow{SC}$

א- הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{SG}$, $\overrightarrow{AH}$.

$$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}) \qquad \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}(-3\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})$$

ב- נסמן נקודה P על AH המקיימת $\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AH}$ ונקודה Q על SG המקיימת $\overrightarrow{SQ} = x\overrightarrow{SG}$

נבדוק האם הנקודות P ו-Q יכולות להתלכד. אם כן, הרי תהיה נקודה משותפת ל-AH ול-SG.

ג- קיבלנו:

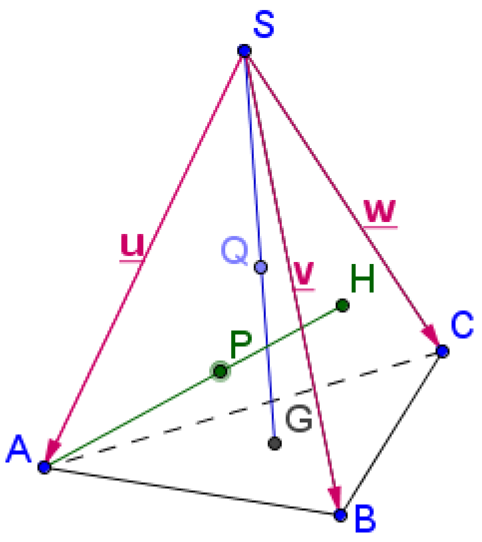
$$\boxed{\overrightarrow{SP} = (1-y)\underline{u} + \frac{y}{3}\underline{v} + \frac{y}{3}\underline{w}} \qquad \boxed{\overrightarrow{SQ} = \frac{x}{3}\underline{u} + \frac{x}{3}\underline{v} + \frac{x}{3}\underline{w}}$$

לפי חד-ערכיות ההצגה $\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SP}$ אם ורק אם

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{3} &= 1 - y \\ \frac{x}{3} &= \frac{y}{3} \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{x = y = \frac{3}{4}}$$

תרגיל 3 | סיכום ומסקנות



- הנקודה G היא נקודת חיתוך התיכונים של הבסיס ABC בפירמידה המשולשת SABC.

הנקודה H היא נקודת חיתוך התיכונים של הפאה SBC.

בתרגיל זה נוכיח כי בכל פירמידה, AH ו-SG נחתכים ונמצא באיזה יחס

מחלקת נקודת החיתוך את כל אחד מהם. נגדיר: $\underline{u} = \overrightarrow{SA}$, $\underline{v} = \overrightarrow{SB}$, $\underline{w} = \overrightarrow{SC}$

א- הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{SG}$, $\overrightarrow{AH}$.

$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$ $\quad \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}(-3\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$

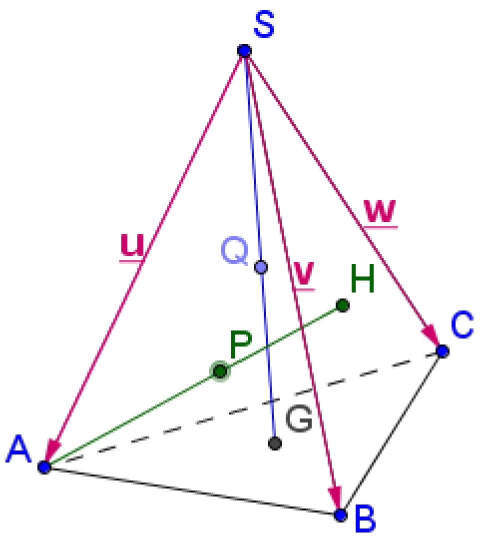
ב- נסמן נקודה P על AH המקיימת $\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AH}$ ונקודה Q על SG המקיימת $\overrightarrow{SQ} = x\overrightarrow{SG}$

נבדוק האם הנקודות P ו-Q יכולות להתלכד. אם כן, הרי תהיה נקודה משותפת ל-AH ול-SG.

ג- סיכום: מצאנו כי כאשר $\boxed{x = y = \frac{3}{4}}$ מתקיים $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SQ}$.

כלומר יש ל-AH ול-SG נקודה משותפת נסמנה ב-O. ומתקיים: $\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{SO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SG}$

באיזה יחס מחלקת O את AH ואת SG?



- הנקודה G היא נקודת חיתוך התיכונים של הבסיס ABC בפירמידה המשולשת SABC.

הנקודה H היא נקודת חיתוך התיכונים של הפאה SBC.

בתרגיל זה נוכיח כי בכל פירמידה, AH ו-SG נחתכים ונמצא באיזה יחס

מחלקת נקודת החיתוך את כל אחד מהם. נגדיר: $\underline{u} = \overrightarrow{SA}$, $\underline{v} = \overrightarrow{SB}$, $\underline{w} = \overrightarrow{SC}$

א- הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{SG}$, $\overrightarrow{AH}$.

$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$ $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}(-3\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$

ב- נסמן נקודה P על AH המקיימת $\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AH}$ ונקודה Q על SG המקיימת $\overrightarrow{SQ} = x\overrightarrow{SG}$

נבדוק האם הנקודות P ו-Q יכולות להתלכד. אם כן, הרי תהיה נקודה משותפת ל-AH ול-SG.

ג- סיכום: מצאנו כי כאשר $\boxed{x = y = \frac{3}{4}}$ מתקיים $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SQ}$.

כלומר יש ל-AH ול-SG נקודה משותפת נסמנה ב-O. ומתקיים: $\overrightarrow{SO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SG}, \overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AH}$

O מחלקת את AH ואת SG ביחס 3:1.

<u>תרגיל</u>

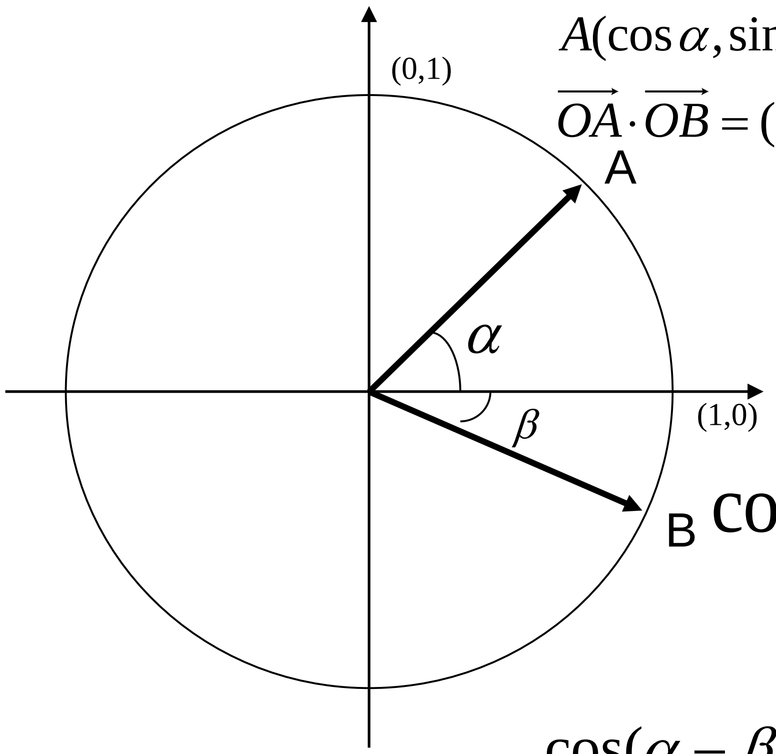
הוכיחו בעזרת וקטורים את הנוסחאות :

$$\cos(\alpha \pm \beta), \quad \sin(\alpha \pm \beta)$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot 1 \cos(\alpha + \beta)$$

$$A(\cos\alpha, \sin\alpha) \quad B(\cos\beta, -\sin\beta)$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (\cos\alpha, \sin\alpha) \cdot (\cos\beta, -\sin\beta) = co\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

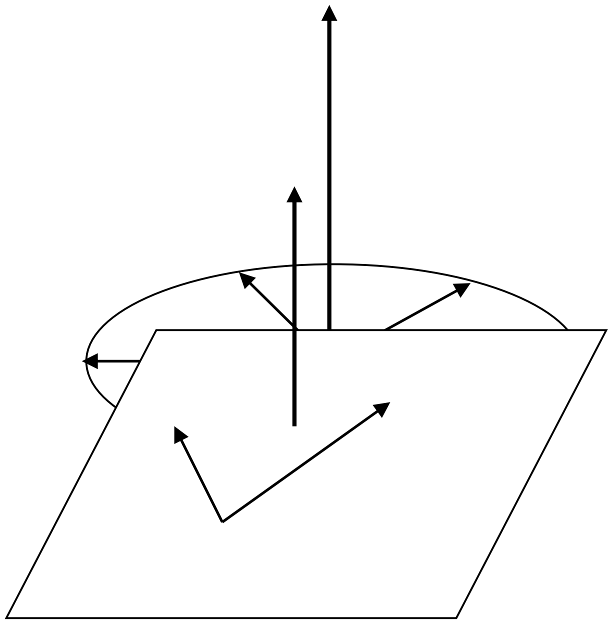


$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

הראו <u>בדרך דומה</u> כיצד ניתן להגיע לנוסחה של : $\cos(\alpha - \beta)$

תרגיל

מצאו שלושה וקטורים (שאינם על ישר אחד) הניצבים לוקטור $\underline{u} = (1, -3, 2)$



$$(1, -3, 2) \cdot (x, y, z) = x - 3y + 2z = 0$$

תרגיל

נתונות הנקודות: A(0,0,0) B(1,2,3) C(7,5,2)

מצאו וקטור הניצב ל- $\overrightarrow{AB}$ ול- $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB} = (1, 2, 3)$ $\overrightarrow{BC} = (6, 3, -1)$

$\overrightarrow{AB} \cdot (x, y, z) = x + 2y + 3z = 0$ $\overrightarrow{BC} \cdot (x, y, z) = 6x + 3y - z = 0$

משפטים בסיסיים בהנדסת המרחב

**ישר נקבע על ידי שתי נקודות, ומישור על ידי שלוש נקודות שאינן על ישר אחד.
**אם שתי נקודות של ישר נתון נמצאות במישור אזי כל נקודות הישר נמצאות במישור זה.
מכאן נובע:
לכל ישר ונקודה שאינה נמצאת עליו קיים מישור יחיד המכיל אותם
שני ישרים נחתכים קובעים מישור יחיד
שני ישרים מקבילים שונים קובעים מישור **יחיד**
**<u>הסכמה</u>: התלכדות היא מקרה פרטי של מקבילות - זאת על מנת שיתקיים:

$$a \parallel b,\ \ b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$$

**שני מישורים שאינם מקבילים נחתכים בישר.

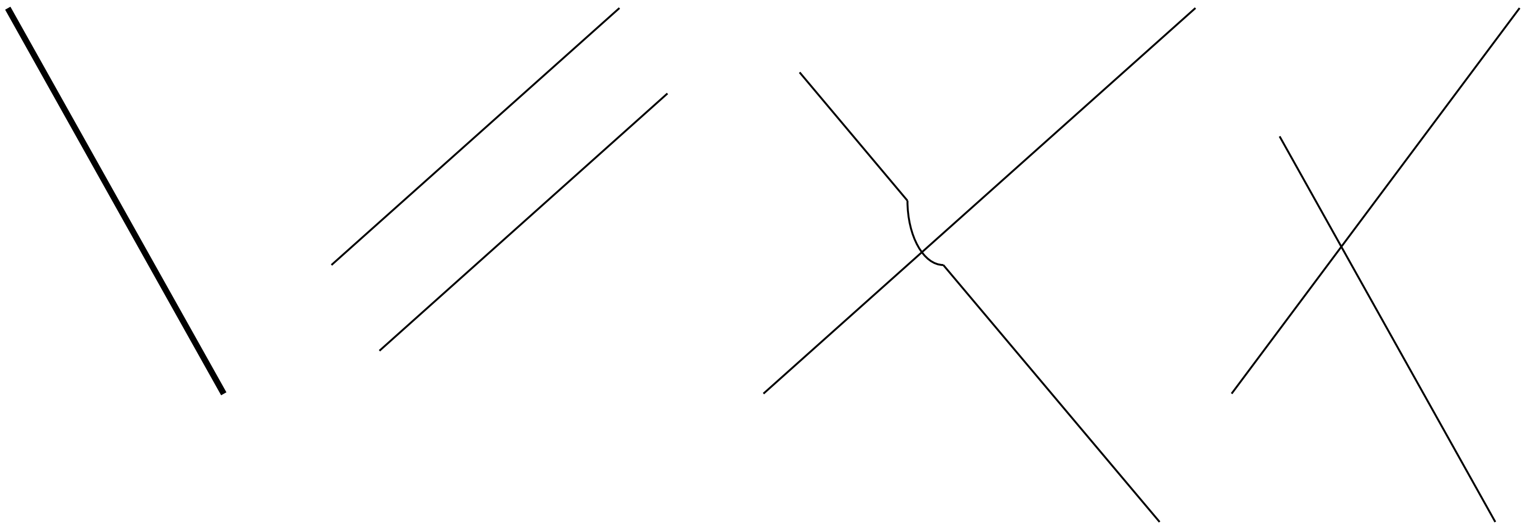
מצב הדדי של ישרים במרחב

ישרים נחתכים

ישרים מצטלבים

ישרים מקבילים

ישרים מתלכדים



מסקנות :

לכל ישר ונקודה שאיננה נמצאת עליו קיים מישור יחיד המכיל אותן.

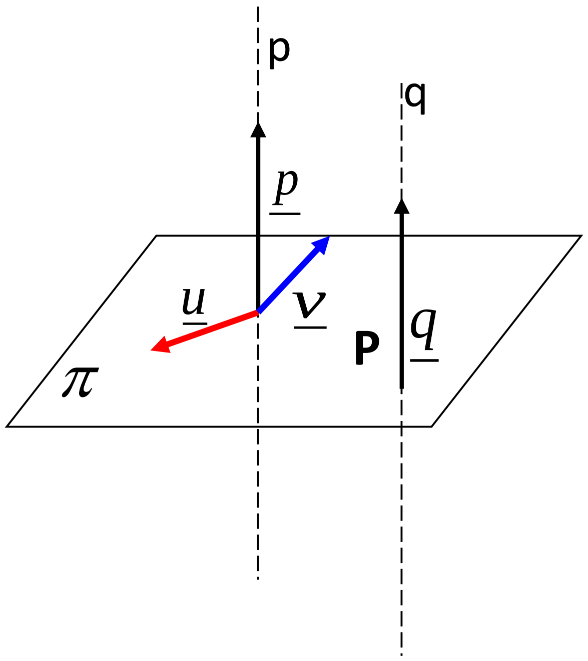
שני ישרים נחתכים קובעים מישור יחיד.

שני ישרים מקבילים שונים קובעים מישור יחיד.

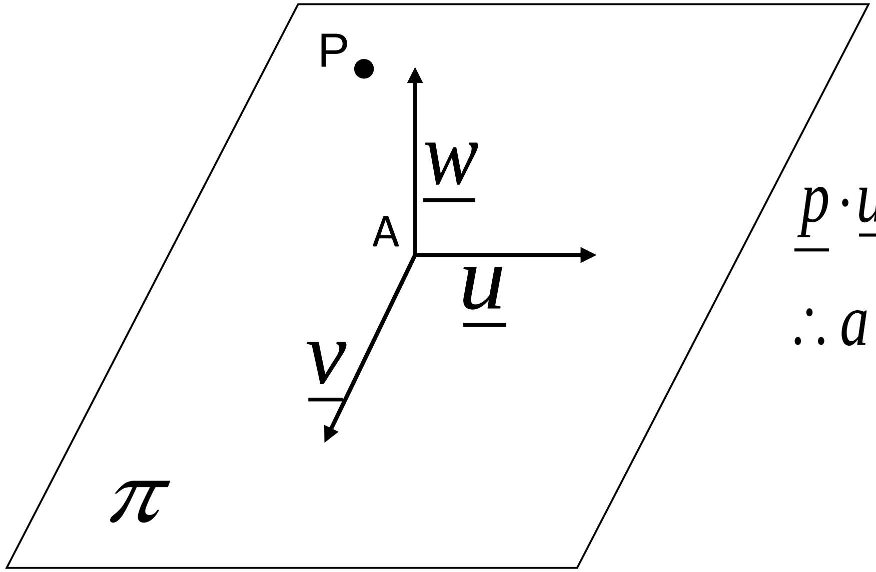
חשוב להדגיש : כאן מדובר בישרים ומישורים שהם קבועים במרחב ואינם ניתנים להזזה, בניגוד לוקטורים!

<u>משפט</u>

אם ישר p חותך מישור π בנקודה P וניצב למישור, אזי גם כל ישר q המקביל ל-p יהיה ניצב למישור.



<u>משפט</u>: דרך כל נקודה P במרחב עובר ישר אחד ויחיד הניצב למישור נתון π



$$\underline{p} = a\underline{u} + b\underline{v} + c\underline{w}$$

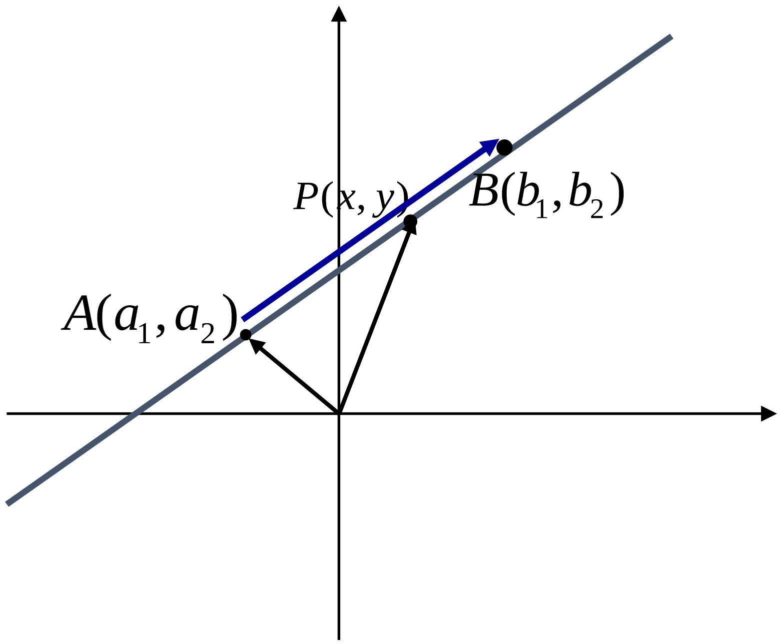
$$\underline{p} \cdot \underline{u} = 0 = a\underline{u} \cdot \underline{u} + b\underline{v} \cdot \underline{u} + c\underline{w} \cdot \underline{u} = a \cdot 1 + 0 + 0$$

$$\therefore a = 0$$

כנ"ל לגבי $\underline{v}$ ומכאן גם $b = 0$

$$\underline{p} = c\underline{w}$$

הצגה פרמטרית של ישר במישור



$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$$

$$(x,y)=(a_1,a_2)+t(b_1-a_1,b_2-a_2)$$

$$\left\{(x,y)\middle|\begin{array}{l}x=a_1+t(b_1-a_1)\\ y=a_2+t(b_2-a_2)\end{array}\right\}$$

דוגמה:

$$\left\{(x,y)\middle|\begin{array}{l}x=-1+t\\ y=3-2t\end{array}\right\}$$

$$\begin{cases}t=x+1\\ y=3-2t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=x+1\\ y=3-2x-2=-2x+1\end{cases}$$

משוואת הישר, אם כן,
היא: y = - 2x +1 .

<u>הערות והארות</u>

בכיתה כדאי להתחיל בדוגמאות מספריות!

חשוב להראות את הקשר בין וקטור הכיוון לשיפוע.

יש להדגיש כי **לכל ערך של t תתאים נקודה אחת על הישר**.

לכל ישר יכולות להיות הצגות רבות ושונות. מומלץ להראות שתי הצגות שונות לישר אחד, ולבקש מהתלמידים לבדוק אם נקודה נתונה נמצאת על הישר.
אם כן – מהו הפרמטר המתאים לה בכל הצגה? כמו כן: מה הקשר בין ההצגות? כיצד נבדוק אם שתי הצגות שונות מייצגות את אותו ישר?

דוגמה

מצאו את המשוואה המפורשת של הישר העובר בנקודות (-2,5) ו-(3,-5).
מצאו את המשוואה הפרמטרית של הישר.
האם תוכלו למצוא קשר בין המשוואות?

מעברים מהצגה פרמטרית להצגה מפורשת, ולהפך

<u>מעבר מהצגה פרמטרית להצגה מפורשת</u>

<u>דרך א'</u>

כפי שהוזכר קודם, <u>וקטור הכיוון קשור לשיפוע הישר</u>. נוכל לומר כי $\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}=m$

לקביעת האיבר החופשי במשוואת הישר נוכל להשתמש <u>באחת מהנקודות על הישר</u>.

<u>דרך ב'</u>

ניתן לחלץ את הפרמטר מאחת המשוואות ולהציבו במשוואה השנייה. פעולה כזו תתן לנו קשר בין x ל-y.

לדוגמה:
נתון הישר:

$$\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}x=-1+t\\ y=3-2t\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{cases}t=x+1\\ y=3-2t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=x+1\\ y=3-2x-2=-2x+1\end{cases}$$

משוואת הישר y = - 2x +1

תרגיל

(רימון ועמיצור, 115/17)

תהיינה במישור נקודות $B = (3,2)$ $A = (-5,4)$.

א- מצאו את הנקודות שבהן הישר AB חותך את ציר ה-X ואת ציר ה-Y.

ב- היכן חותך הישר AB את הישר שמשוואתו $y = 3x$?

מצבים הדדיים של ישרים במישור

יש להקפיד על שימוש בפרמטרים <u>שונים</u> בהצגת שני ישרים בבעיה אחת!

נתונים הישרים:

$$l_1 : (x,y) = (-1,3) + t(4,-2)$$

$$l_2 : (x,y) = (-5,5) + k(-2,1)$$

קבעו את מצבם ההדדי בשתי דרכים שונות.

דרך א: וקטורי הכיוון פרופורציוניים, כלומר הישרים מקבילים או מתלכדים. ניתן לבדוק על ידי הצבת נקודה:

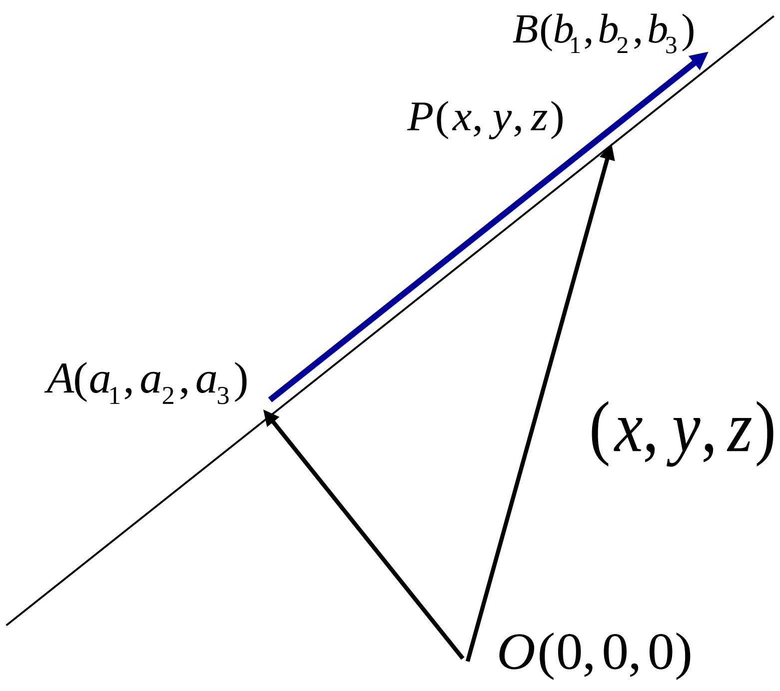
$$(-1,3) \overset{?}{=} (-5,5) + k(-2,1) \Rightarrow \begin{cases} -1 = -5 - 2k \\ 3 = 5 + k \end{cases} \Rightarrow k = -2$$

דרך ב: על ידי מציאת המשוואות המפורשות של הישרים.

$$l_1 : \quad y = -\frac{2}{4}x + c \quad (-1,3) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2.5$$

$$l_2 : \quad y = -\frac{1}{2}x + c \quad (-5,5) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2.5$$

הצגה פרמטרית של ישר במרחב

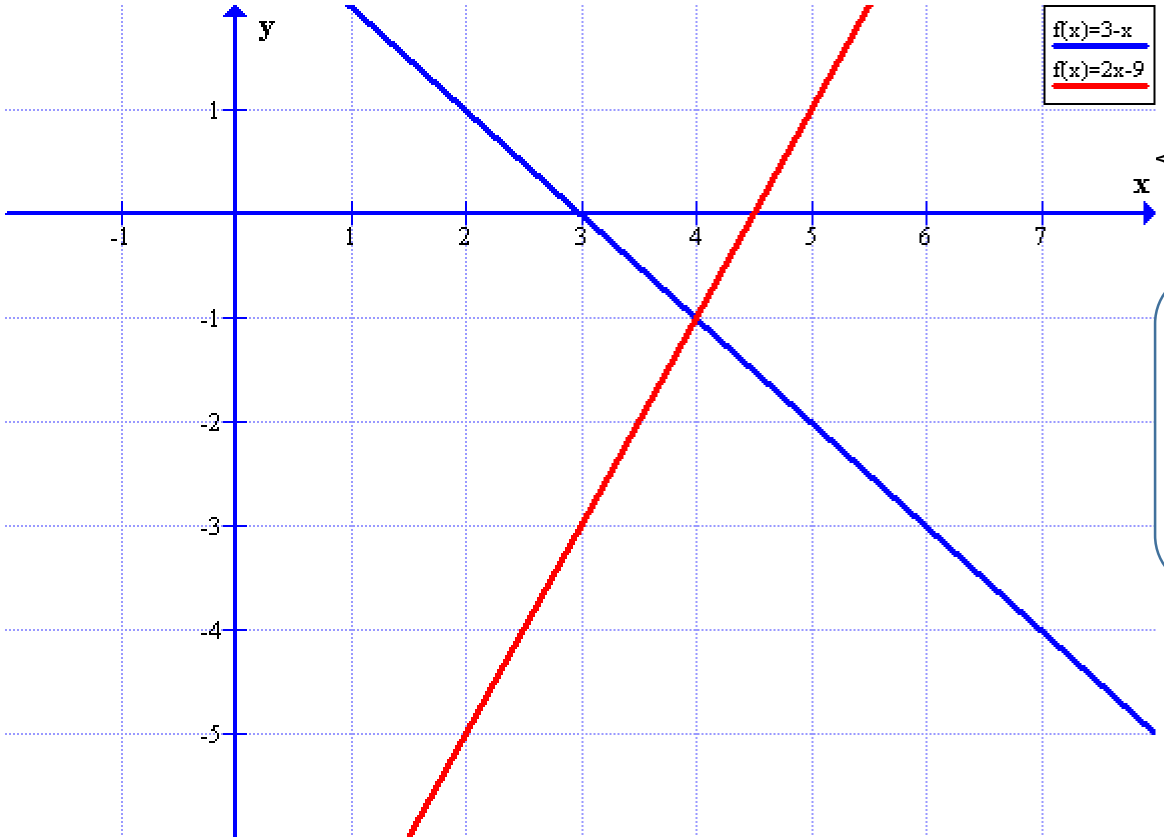


$$\left\{ (x,y,z) \middle| \begin{array}{l} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) \\ z = a_3 + t(b_3 - a_3) \end{array} \right\}$$

$$(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + t(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

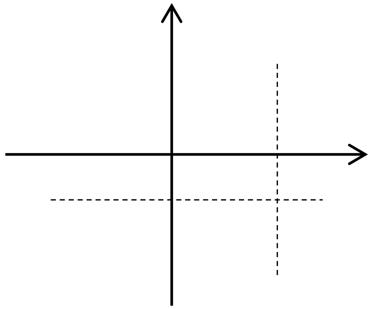
להזכירכם : ישר קבוע במקום, בניגוד לוקטור שניתן להזיזו, ולכן לייצוג הישר יש צורך בנקודה!

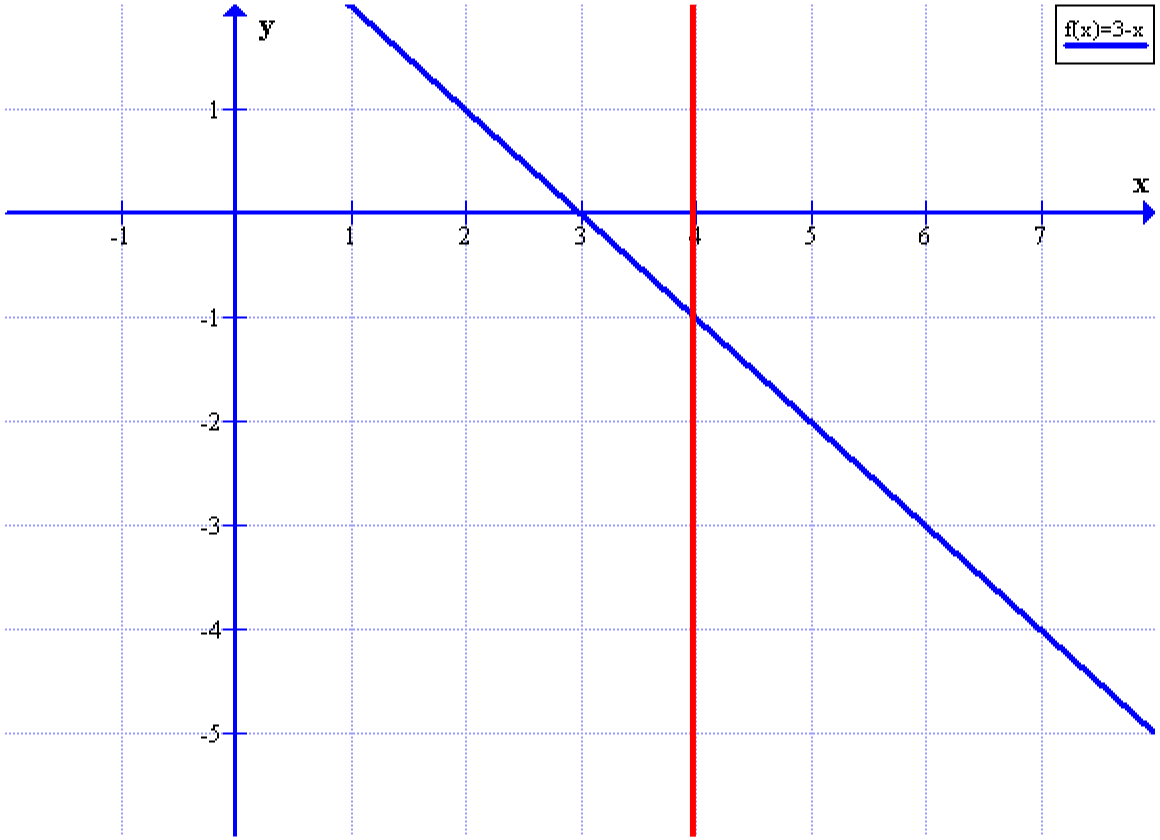
שקילות



$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=3-x \\ y=2x-9 \end{cases}$$

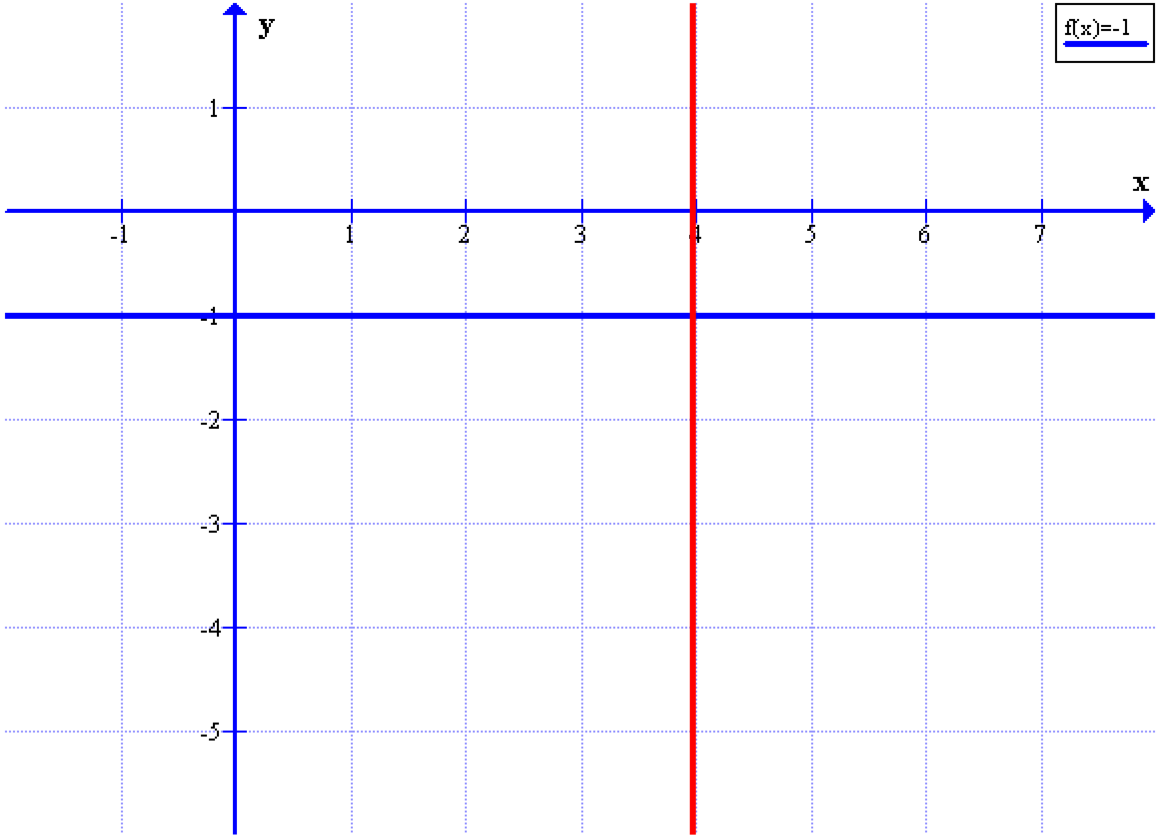




$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 3x=12 \end{cases} \qquad x=4$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x = 12 \end{cases} \qquad x = 4$$



$$\begin{cases} 4 + y = 3 \\ \end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix} y = -1 \\ x = 4 \end{matrix}}$$

כאשר אנו דנים במשוואה פרמטרית של ישר במרחב, לא ניתן לבצע פעולות הצבה

תוך שמירה על שקילות המערכות.

לדוגמה: נתון הישר: $\underline{x} = \left\{ (x,y,z) \middle| \begin{array}{l} x = 1+r \\ y = 2-r \\ z = 1+2r \end{array} \right.$

המערכת הזו שקולה למערכת: $\begin{array}{l} r = x-1 \\ y = 2-(x-1) = 3-x \\ z = 1+2(x-1) = -1+2x \end{array}$

ומה הלאה??

ההצגה ax+by=c מייצגת ישר במישור, וההצגה ax+by+cz=d מייצגת מישור במרחב.

חיתוך של שני מישורים נותן ישר במרחב: זהו פתרון של מערכת של שתי משוואות

בשלושה נעלמים, בפתרונה פרמטרי. *מבחינה אלגברית, לא ניתן לחלץ את הפרמטר t*

מהמשוואות תוך שמירה על שקילות המערכות, שהיא תנאי בסיסי לפתרון מערכת משוואות.