תרגיל 7

להגשה עד 16.12.15

יהי $(X,\mathbb{A},\mu)$ ממ"ח.

שאלה1

1. הוכיחו כי הקבוצה $\mathbb{M}\subseteq\mathbb{P}(X)$ המכילה את כל תתי הקבוצות של $E\subseteq X$ עבורן קיימות $A,B\in\mathbb{A}$ כך ש: $\mu(B\setminus A)=0$ וגם:
$$A\subseteq E\subseteq B$$
מהווה σ־אלגברה מעל X המכילה את $\mathbb{A}$ ($\mathbb{A}\subseteq\mathbb{M}$).
2. בסימונים של הסעיף הקודם, לכל $E\in\mathbb{M}$ נגדיר:
$$\nu(E):=\mu(A)$$
הוכיחו כי:
   (א) ν מוגדרת היטב.
   (ב) ν מהווה מידה על $\mathbb{M}$.
   (ג) לכל $A\in\mathbb{A}\subseteq\mathbb{M}$: $\nu(A)=\mu(A)$.
3. הוכיחו את השלמות של $(X,\mathbb{M},\nu)$. כלומר, לכל $A\in\mathbb{M}$ כך ש $\nu(A)=0$ מתקיים כי:
$$E\subset A\ \Rightarrow\ \nu(E)=0$$
4. הוכיחו כי אם $(X,\mathbb{S},\Sigma)$ מרחב מידה שלם המהווה הרחבה של $(X,\mathbb{A},\mu)$ כלומר: $\mathbb{A}\subseteq\mathbb{S}$, ולכל $A\in\mathbb{A}$: $\Sigma(A)=\mu(A)$, אזי $(X,\mathbb{S},\Sigma)$ מהווה הרחבה של $(X,\mathbb{M},\nu)$.

מסקנה מהתרגיל: לכל מרחב מידה $(X,\mathbb{A},\mu)$ קיימת הרחבה מינימלית יחידה למרחב מידה שלם $(X,\mathbb{M},\nu)$.

הוכחה: בסעיפים 1 ו־2 הוכחתם כי $(X,\mathbb{M},\nu)$ המוגדרת לעיל הינה **הרחבה** של $(X,\mathbb{A},\mu)$. בסעיף 3 הוכחתם את **השלמות** של ההרחבה $(X,\mathbb{M},\nu)$. ובסעיף 4 הוכחתם את **היחידות** (המינימליות) של ההרחבה $(X,\mathbb{M},\nu)$.

שאלה 2

תהי $f\colon X\to\mathbb{R}$ מדידה־$\mathbb{A}$, $E_f:=\{p\in(0,\infty)\mid \|f\|_p<\infty\}$.

1. אם $r<s$ שניהם ב־ E_f אז הקטע (r,s) מוכל ב־E_f (ז"א E_f **קמורה** ב־$\mathbb{R}$).
2. אם $0<r<p<s<\infty$ אז קיים $t\in(0,1)$ יחיד כך ש־ $p=tr+(1-t)s$. עבור t זה:
$$\|f\|_p\le\|f\|_r^{t(\frac{r}{p})}\cdot\|f\|_s^{(1-t)(\frac{s}{p})}\le\max\{\|f\|_r,\|f\|_s\}$$
בפרט
$$L^r(\mu)\cap L^s(\mu)\subseteq L^p(\mu).$$

בהנאה :)