תרגיל 13 בפונקציות מרוכבות

1. חשבו את

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=4}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$$

כאשר

$$f(z)=e^{2z}(z-1)^3(z-2)^4(z-3)^{-5}(z-5)^{-3}$$

פתרון: לפי עקרון הארגומנט סופרים את האפסים והקטבים כולל ריבוי

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=4}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=3+4-5=2$$

$z=1,2,3$ כי $z=5$ מחוץ לתחום המדובר.

2. כמה אפסים, כולל ריבוי, יש למשוואה

$$z^3-2z^2+\frac{1}{4}=0$$

(א) בטבעת $\frac{1}{4}<|z|<1$?

נגדיר $f(z)=\frac{1}{4}$ ו $g(z)=z^3-2z^2+\frac{1}{4}$. ואז על המעגל $|z|=\frac{1}{4}$ מתקיים

$$|g(z)-f(z)|=|z^3-2z^2|\leq\frac{1}{64}+2\frac{1}{16}<\frac{1}{4}=|f(z)|$$

ולכן לפי משפט רושה, אין אפסים בתוך $|z|<\frac{1}{4}$. גם אין אפסים על $|z|=\frac{1}{4}$ כי במקרה זה

$$|z^3-2z^2+\frac{1}{4}|\geq\frac{1}{4}-|z^3-2z^2|>0$$

מצד שני, על $|z|=1$ מתקיים ש

$$|z^3+\frac{1}{4}|\leq\frac{5}{4}<2=|2z^2|$$

ולכן לפי משפט רושה לפולינום

$$z^3-2z^2+\frac{1}{4}$$

יש שני אפסים בתוך העיגול $|z|<1$ ובסך הכל יש שני אפסים בטבעת $\frac{1}{4}<|z|<1$

(ב) בתחום $|z|>1$?

פתרון: לפולינום אין אפסים על $|z|=1$ כי

$$|z^3-2z^2+\frac{1}{4}| \geq |2z^2| - |z^3+\frac{1}{4}| > 0$$

בכל $\mathbb{C}$ יש 3 אפסים לפי המשפט היסודי של האלגברה ולכן לפי סעיף א' בתחום הנתון יש אפס אחד בדיוק.

3. תהי $g(z)$ פונקציה אנליטית ב $\{z \mid |z|\leq 1\}$ המקיימת כי $|g(z)|<1$ על המעגל $|z|=1$. הוכיחו כי קיימת z אחת ויחידה בכדור היחידה שבה $g(z)=z$.
פתרון: נשתמש במשפט רושה ונגדיר $f(z)=-z$ אז לפי הנתון על עיגול היחידה

$$|g(z)| \leq 1 = |-z|$$

ולכן מספר האפסים של $-z$ בתוך כדור היחידה הוא כמספר האפסים של $g(z)-z$ דהיינו 1.

4. יהי $p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ פולינום. הוכיחו כי חייבת להיות נקודה z עם $|z|=1$ שבה $|p(z)|\geq 1$
פתרון: נניח בשלילה שלכל נקודה z עם $|z|=1$ מתקיים $|p(z)|<1$. ונגדיר $f(z)=-z^n$ אז מתקיים שעל מעגל היחידה

$$|g(z)|<|f(z)|$$

ולכן מספר האפסים ש $-z^n$ הבתוך מעגל היחידה כמספר האפסים של

$$g(z)+f(z)=a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

אבל ל $-z^n$ יש n אפסים בתוך מעגל היחידה ול $g(z)+f(z)$ יש לכל היותר $n-1$ אפסים בכל $\mathbb{C}$ (כי הוא פולינום ממעלה לכל היותר $n-1$) וזאת סתירה.