תרגילים 4-5

1. (משפט לוסין) תהי $f=1_A$ פונקצית דריכלה בקטע $[0,1]$, כלומר, $A=[0,1]\setminus\mathbb{Q}$. הוכיחו כי לכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה סגורה F (מצאו את F ממש) בקטע $[0,1]$ כך שהצמצום של f על F הינה פונקציה רציפה ומתקיים $m\left([0,1]\setminus F\right)<\varepsilon$.

2. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית, הוכיחו: $\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left|f\left(x-h\right)-f\left(x\right)\right|dm=0$.
רמז: העזרו בקירוב של פונקציות רציפות.

3. תנו דוגמא לסדרה של פונקציות אי- שליליות f_n השואפות לאפס נקודתית כך ש $\lim_{n\to\infty}\int f_n=0$ אבל לא קיימת פונקציה אינטגרבילית $f_n<g$ לכל n .

4. הפעילו את למת פאטו עבור מידת לבג על הממשיים על הסדרות הבאות:
   i. $1_{(n,n+1)}\left(x\right)$
   ii. $1_{(n,\infty)}\left(x\right)$
   iii. $n1_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}\left(x\right)$
   iv. $1+\operatorname{sgn}\left(\sin\left(\frac{2^n x}{2\pi}\right)\right)$

5. תהי $f\geq 0$ פונקציה מדידה לבג כך ש $\int fdm=\infty$. הראו שלכל $M>0$ קיימת פונקציה g כך ש $0\leq g\leq f$ המקיימת :
   i. $\int gdm>M$
   ii. g חסומה
   iii. לתומך של g מידה סופית.

6. תהי X קבוצה מדידה עם מידה סופית ותהי $f \in L^1(X,\mu)$ (אינטגרבילית ביחס ל μ) אי שלילית.
הראו ש $\lim_{\alpha \to 1-} \int_X f^\alpha d\mu = \int_X f d\mu$. האם התוצאה נכונה גם עבור $\alpha \to 1+$?
.

7. תהי $\phi(x)$ פונקציה המקיימת $\phi(x) = \phi(x+1)$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ובנוסף $\int_{[0,1]} \phi(x) dx < \infty$. נגדיר

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(nx)}{n^2}$$

הראו ש f סופית כמעט בכל מקום.

8. יהי $X = Y = \mathbb{R}$ ונסתכל על $\mathbb{R}^2$ ביחס לסיגמא אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \text{ and } x \le y < x+1 \\ -1 & x \ge 0 \text{ and } x+1 \le y < x+2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

הראו כי $\int\int f(x,y) m(dx) m(dy) \ne \int\int f(x,y) m(dy) m(dx)$. מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?