113-88-תרגיל5-פיתרון:

*פ"א=פולינום אופייני , פ"מ=פולינום מינימלי

1.

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&-2&2\\2&-3&2\end{pmatrix}$$

האם היא ניתנת לשילוש? אם כן מצא את המשולשית לה היא דומה

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&-2&2\\2&-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^{-1}$$

2.הוכח שכל מט' אידמפוטנטית דומה למט' אלכסונית.

$$A^2=A\Rightarrow A^2-A=A(A-I)=0\Rightarrow x^2-x\in N_A\Rightarrow M_A\mid x(x-1)\Rightarrow M_A\in\{x,x-1,x(x-1)\}$$

בכל המיקרים המינימלית מל"ל שונים ולכן שייכת למטריצה לכסינה.

ע"מ 93 , 5.16:

$A\in Mat_n(F)$

$$M_A(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$$

הוכח שהבאים שקולים:

א. A רגולרית ב. 0 איננו ע"ע של A ג. $a_0\neq 0$

פיתרון:

א←ב: הוכחנו

ב←ג: נניח $a_0=0$ אזי $M_A(x)=\sum_{i=1}^{m}a_ix^i=a_mx^m+...+a_1x^1=x(a_mx^{m-1}+...+a_1)$

כלומר 0 שורש של הפ"מ לכן 0 שורש של הפ"א בסתירה לנתון. אזי $a_0\neq 0$

ג←א: נניח בשלילה ש A סינגולארית אזי 0 ע"ע של A אזי 0 שורש של הפ"א ולכן של הפ"מ, אזי הפ"מ הוא מהצורה: $M_A(x)=xP_i(x),\quad P_i(x)\in F[x]$ ולכן אין בו חזקת 0 של x בסתירה לנתון.

אזי A רגולרית

ע"מ 94 ,5.22:

$A\in Mat_n(F)$ מטריצה אידמפוטנטית ($A^2=A$)

מצא את הע"ע של A, הראה שהפ"א מתפרק לגורמים לנאריים, מצא פ"מ של A, ותאר את tr(A)

פיתרון:

ע"מ למצוא ע"ע נבדוק איפה הפ"א מתאפס:

$$A^2-A=0\Rightarrow f(A)=0:\ f(x)=x(x-1)$$

מצד שני הוכחנו שהפ"מ מחלק כל מאפס שלA:

$$M_A \in \{x, x-1, x(x-1)\}$$

המקרה הראשון מתאים למטריצת האפס, אז

$$f_A(x) = x^n$$
$$tr(A) = 0$$

המקרה השני מתאים למטריצת היחידה, אז:

$$f_A(x) = (x-1)^n$$
$$tr(A) = n$$

אחרת:

$$f_A(x) = x^{\alpha}(x-1)^{\beta} : \alpha + \beta = n$$
$$tr(A) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = \beta$$

<u>ע"מ 93, 5.14:</u>

השתמש בפ"א כדי למצוא פ"מ עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

פיתרון:

$$f_A(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^2 \Rightarrow x_1 = 1, x_{2,3} = 2, x_{4,5} = 3$$

בחישוב: $M_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2$

<u>ע"מ 93, 5.15:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

מצא M_A <u>ובעזרתו</u> A^{-1}

(רמז: זיכרו מה קורה ל M_A כאשר נציב בו את A ובודדו משם את I)

פיתרון:

$$f_A(x)=(x-1)^2(x-2)$$

לכן האפשרויות לפ"מ הן: $(x-1)^2(x-2),(x-1)(x-2)$

נבדוק את הדרגה הנמוכה ראשית:

$$(A-I)(A-2I)=0$$
$$\Downarrow$$
$$M_a(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$$

נחפש את ההפוכה לA. ידוע ש A מתאפסת על הפ"מ שלה, אזי:

$$M_A(A)=0$$
$$\Downarrow$$
$$A^2-3A+2I=0$$
$$\Downarrow$$
$$A^2-3A=-2I$$
$$\Downarrow$$
$$A(A-3I)=-2I$$
$$\Downarrow$$
$$A\left[-\frac{1}{2}(A-3I)\right]=I$$
$$\Downarrow$$
$$A^{-1}=-\frac{1}{2}(A-3I)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&-2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

<u>ע"מ 92, 5.12:</u>

$$A\in Mat_n(F)$$
$$M_A(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1$$
$$f(x)=x^2+4x+3$$

הוכח שהמטריצה $f(A)$ הפיכה

(רמז: השתמש בעובדה ש A מתאפסת על הפ"מ שלה ע"מ לפשט את f(A) וזכור שמט' הפיכה עם הדט' שלה שונה מאפס)

פיתרון:

$$f(x)=x^2+4x+3=M_A(x)+6x+2$$
$$\Downarrow$$
$$f(A)=M_A(A)+6A+2I=6A+2I$$

נניח בשלילה שA לא הפיכה, אזי:

$$0=\left|f(A)\right|=\left|6A+2I\right|=6^n\left|A+\frac{1}{3}I\right|$$

$$\Downarrow$$

$$0=\left|A+\frac{1}{3}I\right|$$

$$\Downarrow$$

$\frac{1}{3}$ הינו שורש של הפ"א בסתירה לכך שאיננו שורש של הפ"מ.

אזי A הפיכה.

<u>ע"מ 92, 5.10:</u>

$A\in Mat_n(F)$

הוכח: $f_A(x)\mid m_A^n(x)$

ראו קובץ של דר' צבאן באתר

<u>ע"מ 91, 5.5:</u>

מצא פ"מ עבור המט' הבאות לפי האלגוריתם למציאתו (משעור קודם),כלומר, לא ע"י הפ"א.

א. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$

(זיכרו, הפולינום המתוקן המתאים לכל פולינום במאפס גם שייך למאפס)

פיתרון:

א.

$$M_A(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$$
$$M_A(A)=a_2A^2+a_1A+a_0I=0$$
$$a_2\begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix}^2+a_1\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+a_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases}a_2\cdot7+a_1+a_0=0\\a_2\cdot10+a_1\cdot2=0\\a_2\cdot15+a_1\cdot3=0\\a_2\cdot22+a_1\cdot4+a_0=0\end{cases}\Rightarrow a_1=-5a_2,\quad a_0=-2a_2$$
$$\Downarrow$$
$$f\in N_A,\ f(x)=a_2x^2-5a_2x-2a_2\Rightarrow g(x)=x^2-5x-2=\left(x-\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)\Rightarrow$$
$$M_A(x)=x^2-5x-2$$

ב.

$$M_A(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$$
$$M_A(A)=a_2A^2+a_1A+a_0I=0$$
$$a_2\begin{pmatrix}a^2&2ab\\0&a^2\end{pmatrix}^2+a_1\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}+a_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases}a_2\cdot a^2+a_1\cdot a+a_0=0\\2a_2\cdot ab+a_1\cdot b=0\end{cases}\Rightarrow a_1=-2a_2a,\qquad a_0=a_2a^2$$
$$\Downarrow$$
$$f\in N_A,\ f(x)=a_2x^2-2a_2ax+a_2a^2\Rightarrow g(x)=x^2-2ax+a^2=(x-a)^2\Rightarrow$$
$$M_A(x)=(x-a)^2\quad \text{או}\quad (x-a)$$
$$A-aI\neq0\Rightarrow M_A(x)=(x-a)^2$$

ע"מ 91, 5.4:

א. הוכח שלמטריצות B,A דומות אותו פ"מ
ב. הוכח שאם A או B הפיכות אז הפ"מ של AB ושל BA זהים

פיתרון:
א.

$$A\approx B\Rightarrow\exists P:A=PBP^{-1}$$
$$\Downarrow$$
$$0=M_A(A)=M_A(PBP^{-1})=PM_A(B)P^{-1}\Rightarrow0=M_A(B)\Rightarrow M_A\in N_B$$
$$\left(0=M_B(B)=M_B(P^{-1}AP)=P^{-1}M_B(A)P\Rightarrow0=M_B(A)\Rightarrow M_B\in N_A\quad,\quad \text{ובהתאמה}\right)$$

לכן M_A חייב להיות מינימלי ב N_B (ובהתאמה: M_B חייב להיות מינימלי ב N_A) אחרת הוא לא יהיה מינימלי ב N_A (ובהתאמה: תיפגע מינימליות M_B ב N_B)
ולכן $M_B = M_A$

ב. הוכחנו בעבר כי AB דומה ל BA ולכן יש להן אותו פ"מ לפי סעיף א