

בוחר בקורס מבוא לחוגים ומודולים 88-212 סמסטר ב' תשפ"א

הוראות כתבו באופן ברור שם מלא ומספר ת"ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור.
משך הבוחן: 90 דקות. לאחר מכן יינתנו 10 דקות נוספות לטובת סריקת הקבצים והעלאתם למודל.
סך הנקודות עולה על 100, אך הציון המקסימלי בבוחן הינו 100.
חומר עזר: אסור.
בכל הבוחן, "חוג" מתייחס לחוג שאינו חוג האפס (כלומר $1 \neq 0$).

בהצלחה!

שאלה 1. (אין קשר בין הסעיפים)

א. יהי R חוג שאין בו אידאלים שמאליים לא טריוויאליים (כלומר האידאלים השמאליים היחידים הם $\{0\}$ ו- R). הוכיחו כי R הוא חוג עם חילוק. (20 נקודות)

ב. יהי R חוג, ויהי $J \triangleleft R[x]$ אידאל. האם בהכרח קיים אידאל $I \triangleleft R$ כך ש- $J = I[x]$? (20 נקודות)

שאלה 2.

א. מצאו $n \in \mathbb{N}$ שעבורו $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/(3+\sqrt{3}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, והוכיחו את האיזומורפיזם. (20 נקודות)

ב. מצאו את כל האידאלים של $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ שמכילים את $3 + \sqrt{3}$. (20 נקודות)

שאלה 3. יהי R חוג, יהיו $I_1, I_2 \triangleleft R$ אידאלים מקסימליים שונים זה מזה, ויהיו $J_1, J_2 \triangleleft R$ אידאלים מקסימליים שונים זה מזה. נניח ש- $I_1 I_2 = J_1 J_2$. הוכיחו כי $I_1 = J_1$ ו- $I_2 = J_2$, או $I_1 = J_2$ ו- $I_2 = J_1$. (בשאלה זו מותר להניח ש- R חילופי ועדיין לקבל את מלוא הנקודות). (30 נקודות)