אינטגרלים במישור ובמרחב

אינטגרלים כפולים

יהי תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על D כרצפה, ועל f כגובה התקרה, והאינטגרל $\iint_D f dxdy$ מייצג את נפח הבית.

כמו כן, אפשר לחשוב על D כמשטח, ועל f כצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של המשטח.

בנוסף, $\iint_D 1dxdy$ הוא השטח של התחום D.

חישוב אינטגרלים כפולים

אם

$$D = \{(x,y)|a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

אזי

$$\iint_D f dxdy = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

שינוי קואורדינטות על אינטגרלים כפולים

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right|$$

$$(x,y) \in D \qquad (u,v) \in D'$$

אזי

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \cdot |J| dudv$$

קואורדינטות קוטביות

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsin(\theta)$$

$$|J| = r$$

$$(x,y) \in D \qquad (r,\theta) \in D'$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f\big(rcos(\theta), rsin(\theta)\big) rdrd\theta$$

אינטגרלים משולשים

יהי תחום $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על V כאובייקט תלת מימדי, ועל f כצפיפות בכל נקודה, והאינטגרל $\iiint_V f dxdydz$ מייצג את המסה של האובייקט.

בנוסף, $\iiint_V 1dxdydz$ הוא הנפח של התחום V.

חישוב אינטגרלים משולשים

אם

$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

וכן

$$V = \{(x,y,z) | (x,y) \in D, h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y)\}$$

אזי

$$\iiint_V f dxdydz = \iint_D \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dxdy$$

שינוי קואורדינטות

$$x = x(u,v,w)$$
$$y = y(u,v,w)$$
$$z = z(u,v,w)$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} \right|$$

$$(x,y,z) \in V \qquad (u,v,w) \in V'$$

אזי

$$\iiint_V f(x,y,z) dxdydz = \iiint_{V'} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) |J| dudvdw$$

קואורדינטות גליליות

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsin(\theta)$$
$$z = z$$

$$(x,y,z) \in V \qquad (r,\theta,z) \in V'$$

$$|J| = r$$

$$\iiint_V f(x,y,z) dxdydz = \iiint_{V'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) \cdot r dr d\theta dz$$

קואורדינטות כדוריות

$$x = rsin(\theta)\cos(\phi)$$
$$y = rsin(\theta)\sin(\phi)$$
$$z = rcos(\theta)$$

$$|J| = r^2 \sin(\theta)$$

$$(x,y,z) \in V \qquad (r,\theta,\phi) \in V'$$

$$\iiint_V f dxdydz = \iiint_{V'} f\big(r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), rcos(\theta)\big) \cdot r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במישור

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על C בתור שפה על הרצפה, ועל f כגובה הקירות, ואז האינטגרל $\int_C f dr$ מייצג את שטח הקירות.

כמו כן, אפשר לחשוב על C בתור חבל על הרצפה, ועל f כצפיפות החבל בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של החבל.

בנוסף, $\int_C 1dr$ הוא אורך המסילה.

חישוב אינטגרלים קווים מסוג ראשון במישור

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה C

$$\vec{r} = \left(x(t), y(t)\right)$$

$$t \in [a, b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f\left(x(t), y(t)\right) \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} dt$$

אינטרגלים קוויים מסוג ראשון במרחב

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על C בתור חבל במרחב ועל f בתור הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל $\int_C f dr$ מייצג את המסה של החבל.

בנוסף, האינטגרל $\int_C 1dr$ הוא האורך של המסילה.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במרחב

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה

$$\vec{r} = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$$
$$t \in [a, b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2} dt$$

אינטגרלים קוויים מסוג שני במישור

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

אפשר לחשוב על C בתור מסלול על הרצפה, ועל $\vec{F}$ בתור שקול הכוחות בכל נקודה, ואז $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ מייצג את העבודה שנעשית על חלקיק שנע לאורך המסלול.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג שני במישור

תהי פרמטריזציה של C

$$\vec{r} = \big(x(t), y(t)\big)$$

$$t \in [a,b]$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}\big(x(t), y(t)\big) \cdot \big(x'(t), y'(t)\big) dt$$

אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

אפשר לחשוב על C בתור מסלול במרחב, ועל $\vec{F}$ בתור שקול הכוחות בכל נקודה, אז האינטגרל $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ מייצג את העבודה הנעשית על חלקיק שנע לאורך המסלול.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב

תהי פרמטריזציה של המסילה

$$\vec{r} = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

$$t \in [a,b]$$

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\big(r(t)\big) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big) dt$$

סימון נוסף לאינטגרלים קוויים מסוג שני

$$\vec{F} = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath}$$

והפרמטריזציה של המסילה היא

$$\vec{r} = \big(x(t), y(t)\big)$$

אזי נסמן

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy$$

כאשר

$$\int_C P dx = \int_a^b P\big(\vec{r}(t)\big) \cdot x'(t) dt$$

$$\int_C Q dy = \int_a^b Q\big(\vec{r}(t)\big) \cdot y'(t) dt$$

משפט גרין

יהי תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ בעל השפה C ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ בעל נגזרות רציפות

אזי האינטגרל הקווי מסוג שני של $\vec{F}$ מסביב לC נגד כיוון השעון שווה לאינטגרל הכפול של $curl(\vec{F})$ על התחום D.

נסמן

$$\vec{F} = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath}$$

אזי

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D curl(\vec{F}) dxdy = \iint_D (Q_x - P_y) dxdy$$

אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על M כאובייקט משטחי ועל f כפונקצית הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל $\iint_M f dS$ מייצג את המסה של האובייקט.

בנוסף, $\iint_M 1 dS$ מייצג את שטח הפנים של המשטח.

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

$$(u,v) \in D$$

אזי

$$\iint_M f dS = \iint_D f\big(\vec{s}(u,v)\big) \cdot |\vec{s}_u \times \vec{s}_v| dudv$$

אינטגרלים משטחיים מסוג שני

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ויהי כיוון לנורמל למשטח.

אפשר לחשוב על המשטח בתור ממברנה ועל השדה הוקטורי בתור עוצמת הזרימה, אז האינטגרל $\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ הוא סך כל הזרימה דרך הממברנה בכיוון הנורמל הנתון.

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג שני

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

$$(u,v) \in D$$

אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \pm \iint_D \vec{F}\big(\vec{s}(u,v)\big) \cdot (\vec{s}_u \times \vec{s}_v) dudv$$

כאשר הסימן נקבע על ידי בחירת וקטור הנורמל $\vec{s}_u \times \vec{s}_v$ בכיוון הנתון.

משפט גאוס (דיברגנץ)

יהי גוף תלת מימדי $V \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל משטח מעטפת M ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות $\vec{F}$, ונביט בנורמל כלפי חוץ הגוף, אזי

$$\iint_M \vec{F}\cdot\hat{n}dS = \iiint_V div(\vec{F})dxdydz = \iiint_V \nabla\cdot\vec{F}dxdydz$$

משפט סטוקס

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל שפה C ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות $\vec{F}$, אזי האינטגרל הקווי נגד כיוון השעון כאשר הלמעלה הוא לפי הנורמל למשטח מקיים:

$$\oint \vec{F}d\vec{r} = \iint_M rot(\vec{F})\cdot\hat{n}dS = \iint_M \nabla\times\vec{F}\cdot\hat{n}dS$$